El tangram como unidad didáctica para profundizar el concepto de fracción propia

César Alonso Chicuasuque Gutiérrez

Universitaria Agustiniana

Facultad de Humanidades, Ciencias Sociales y Educación

Programa de Especialización en Pedagogía

Bogotá D.C.

2020

El tangram como unidad didáctica para profundizar el concepto de fracción propia

César Alonso Chicuasuque Gutiérrez

Director
Nubia Constanza Arias Arias

Trabajo para optar al título de Especialista en Pedagogía

Universitaria Agustiniana
Facultad de Humanidades, Ciencias Sociales y Educación
Programa de Especialización en Pedagogía

Bogotá D.C.

2020

Resumen

El presente proyecto tiene como fin determinar la influencia que tiene el manejo de material concreto, especialmente el juego del tangram, en la introducción y ejemplificación del concepto de fracción propia en estudiantes de primaria. Para llevar a cabo este proyecto se solicitó la colaboración de uno docente de matemáticas de estos niveles para aplicar los instrumentos de la investigación para observar el nivel de aprehensión del concepto de fracción propia y las relaciones que se pueden establecer a partir de este material (relaciones de orden, fracciones equivalentes y suma de fracciones). El material pretende extender la interpretación del estudiante en el concepto de fracción propia, la cual se obtiene de dividir una unidad (el todo) solamente en partes iguales, al observar que las partes en que están dividido el juego tienen una relación de equivalencia entre ellas. Se puede determinar que, en estas edades, a los estudiantes se les facilita la comprensión de un concepto matemático, mediante el manejo de un material concreto, donde evidencian y demuestran lo que encuentran en los libros de texto o en las explicaciones de su docente.

Palabras clave: Tangram, fracción propia, unidad, suma de fracciones.

Abstract

The present project aims to determine the influence that the handling of concrete material, especially the tangram game, has on the introduction and exemplification of the concept of proper fraction in primary school students. To carry out this project, the collaboration of a mathematics teacher of these levels was requested to apply the research instruments to observe the level of apprehension of the concept of proper fraction and the relationships that can be established from this material (relationships order, equivalent fractions and sum of fractions). The material aims to extend the student's interpretation of the concept of proper fraction, which is obtained by dividing a unit (the whole) only in equal parts, by observing that the parts into which the game is divided have an equivalence relation between them . It can be determined that, at these ages, students are facilitated to understand a mathematical concept, by handling a specific material, where they evidence and demonstrate what they find in textbooks or in the explanations of their teacher.

Keyword: Tangram, proper fraction, unit, sum of fractions.

Introducción

En el aprendizaje de la matemática, el concepto de número racional, en especial el de fracción propia, presenta dificultades de aprehensión en los estudiantes de primaria, si se realiza de manera teórica y en un solo plano (tablero). La noción de fracción propia se puede realizar de manera tangible por medio del juego del TANGRAM, porque con este medio el estudiante puede observar, experimentar y relacionar cada una de las partes que componen un todo. Adicionalmente se puede introducir a otros conceptos como la fracción equivalente y a la suma de fracciones.

El juego del TANGRAM favorece el desarrollo del pensamiento matemático, estimula la imaginación y la creatividad y mejora la concentración. No hay límite de edad para practicarlo y se puede iniciar tan temprano como desde los tres años. Este antiguo rompecabezas chino consiste en formar siluetas de figuras con 7 piezas o **tans** sin sobreponerlas. Está compuesto por un cuadrado, un paralelogramo romboide y cinco triángulos de distintos tamaños (semejantes). Con ellos se pueden formar una gran cantidad de figuras: animales, objetos, personas, letras.

Por tanto, para profundizar de forma didáctica el concepto de fracción y sus relaciones (suma, equivalencia, orden) por medio de un material concreto, como el TANGRAM, se pretende mejorar la abstracción de conceptos matemáticos. Para esto se realizó una prueba diagnóstica, con una muestra de estudiantes de primaria, donde se evidenció el preconcepto de fracción propia a partir de unidades circulares. Luego se realizó un taller de comprensión de las partes, por medio de diferentes fracciones que se pueden obtener de una unidad cuadrada, para que el estudiante comprendiera otras formas de dividir el todo. Después se realiza el trabajo con el juego del TANGRAM, donde el estudiante compara y genera equivalencias con cada una de las 7 piezas del juego. Por último, se proponen diferentes ejercicios de relaciones de orden (mayor que, menor que) y sumas que pueda desarrollar con el TANGRAM.

Realizando este trabajo se puede observar que esta edad del desarrollo, el estudiante adquiere un mejor aprendizaje matemático al trabajar con material concreto que le genere una motivación para reforzar ciertos conceptos.

Antecedentes

Referente conceptual o teórico

Derechos básicos de aprendizaje.

En la página web de Colombia Aprende (http://colombiaaprende.edu.co) encontramos una introducción a esta herramienta que ha desarrollado el Ministerio de Educación Nacional, la cual se presenta "como una herramienta dirigida a toda la comunidad educativa para identificar los saberes básicos que han de aprender los estudiantes en cada uno de los grados de la educación escolar, de primero a once, y en las áreas de Lenguaje y Matemáticas.

Los Derechos Básicos de Aprendizaje se estructuran guardando coherencia con los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias (EBC). Su importancia radica en que plantean elementos para la construcción de rutas de aprendizaje año a año para que, como resultado de un proceso, los estudiantes alcancen los EBC propuestos por cada grupo de grados. Debe tenerse en cuenta que los DBA son un apoyo para el desarrollo de propuestas curriculares que pueden ser articuladas con los enfoques, metodologías, estrategias y contextos definidos en cada establecimiento educativo, en el marco de los Proyectos Educativos Institucionales materializados en los planes de área y de aula."

El tema de fracciones se empieza a contemplar en los DBA's desde tercer grado, donde se inicia con su representación y comparación de que las partes forman un todo. Continúa su énfasis en el grado cuarto donde ya se incluyen las operaciones básicas y el concepto de fracción equivalente. Inicialmente se puede observar que la propuesta didáctica del TANGRAM se puede haber aplicado en estudiantes de grado tercero, pero la finalidad de este proyecto está enfocada en el grado cuarto, para analizar cómo está el aprendizaje del tema de fracciones.

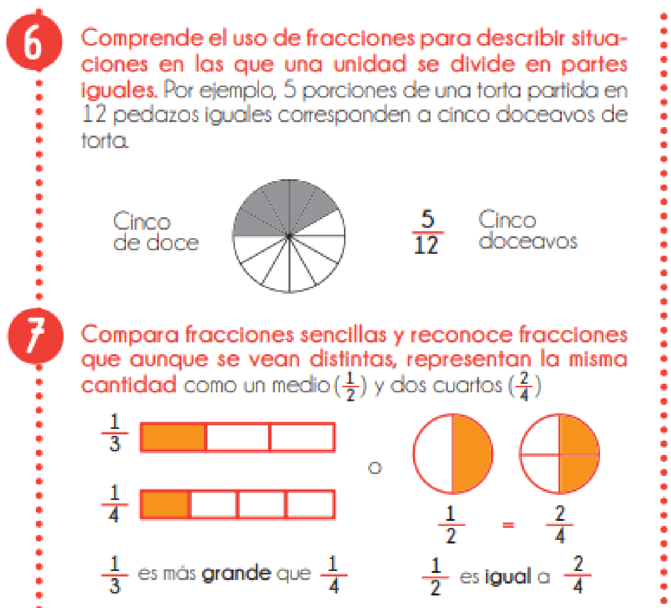


Figura 1. DBA's de tercer grado. MEN (2015)

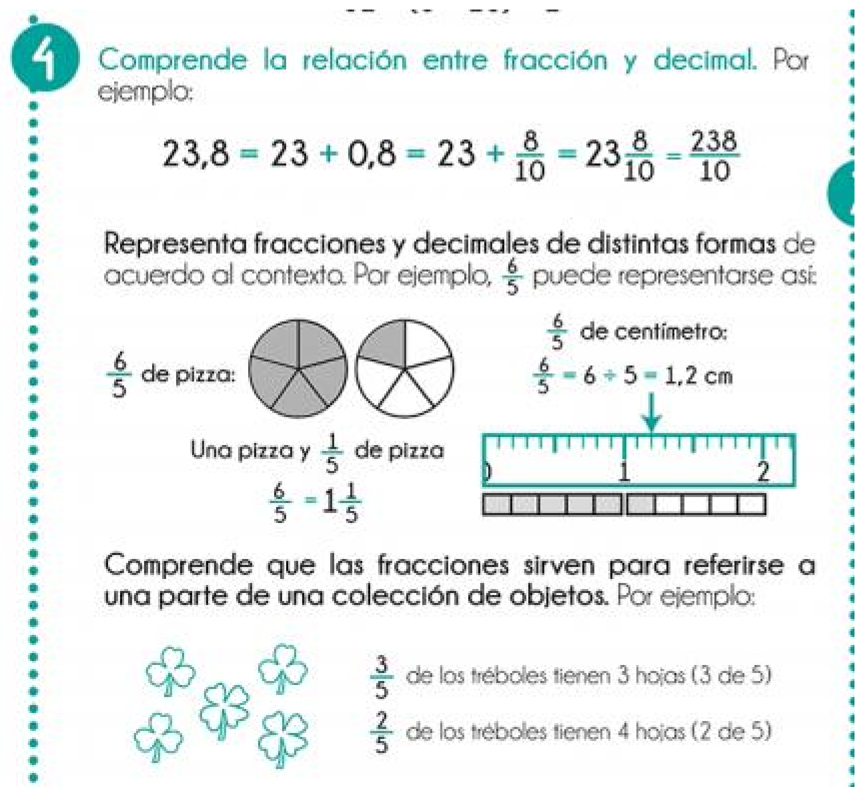
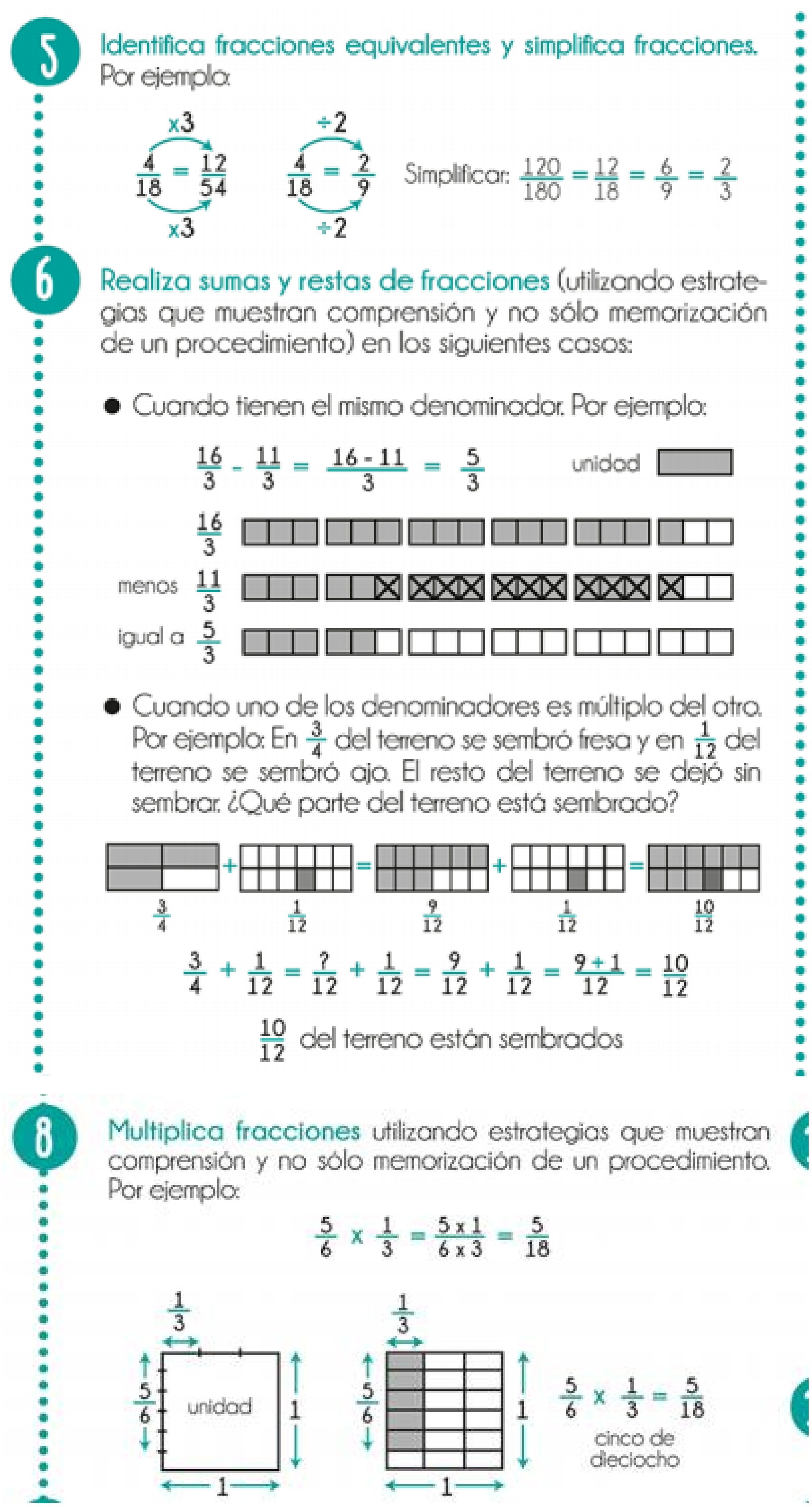


Figura 2. DBA para grado cuarto. MEN (2015)



5 **Identifica fracciones equivalentes y simplifica fracciones.** Por ejemplo:

$$\frac{4}{18} \xrightarrow{\times 3} \frac{12}{54} \qquad \frac{4}{18} \xrightarrow{\div 2} \frac{2}{9}$$

Simplificar: $\frac{120}{180} = \frac{12}{18} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

6 **Realiza sumas y restas de fracciones** (utilizando estrategias que muestran comprensión y no sólo memorización de un procedimiento) en los siguientes casos:

- Cuando tienen el mismo denominador. Por ejemplo:

$$\frac{16}{3} - \frac{11}{3} = \frac{16-11}{3} = \frac{5}{3}$$

unidad

$\frac{16}{3}$

menos $\frac{11}{3}$

igual a $\frac{5}{3}$

- Cuando uno de los denominadores es múltiplo del otro. Por ejemplo: En $\frac{3}{4}$ del terreno se sembró fresa y en $\frac{1}{12}$ del terreno se sembró ajo. El resto del terreno se dejó sin sembrar. ¿Qué parte del terreno está sembrado?

$\frac{3}{4}$ + $\frac{1}{12}$ = $\frac{9}{12}$ + $\frac{1}{12}$ = $\frac{10}{12}$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{12} = \frac{?}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9+1}{12} = \frac{10}{12}$$

$\frac{10}{12}$ del terreno están sembrados

8 **Multiplica fracciones** utilizando estrategias que muestran comprensión y no sólo memorización de un procedimiento. Por ejemplo:

$$\frac{5}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{5 \times 1}{6 \times 3} = \frac{5}{18}$$

$\frac{1}{3}$ $\frac{5}{6}$ unidad 1 1

$\frac{1}{3}$ $\frac{5}{6}$ 1 1

$\frac{5}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$ cinco de dieciocho

Figura 3. DBA’s grado cuarto. MEN (2015)

Desarrollo cognitivo y progresión del aprendizaje de las fracciones.

En cuanto a este aspecto a tener en cuenta en el aprendizaje de las fracciones, Juan D. Godino nos presenta en su proyecto "Didáctica de las matemáticas para maestros", en el capítulo referente a sistemas numéricos, nos presenta algunos significados específicos que se deben construir en cuanto al concepto de fracción y número racional.

"**Desarrollo de la fracción como parte de un todo"**

Parece ser que las primeras ideas de fracción de los niños son de naturaleza tridimensional e imprecisa. Ejemplo: Un niño puede decir "*este jarro está medio lleno"*, o *"me he comido medio pastel"*, cuando, en realidad sólo queda una pequeña parte del agua o del pastel. "Medio" en este contexto es para él algo que no está completo, pero queda todavía algo.

En los experimentos de Piaget[1] se pide a los niños dividir en partes iguales figuras de papel o arcilla, doblándolas o cortándolas para efectuar un reparto equitativo. A las siguientes edades realizan los niños diferentes tipos de tareas:

• 4-5 años: Dividir en mitades figuras pequeñas y regulares;

• 6-7 años: Dividir en tercios;

• 7-9: Dividir en sextos por tanteo;

• 10 años: Dividir sistemáticamente en sextos, partiendo primero por la mitad y luego dividiendo el resultado en tres partes iguales.

En algunos casos los niños realizan estas tareas antes de estas edades o son capaces de comprender la idea de mitad, tercio y sexto, aunque físicamente tengan dificultad en realizar la división de la figura en partes iguales. Hay siete criterios para comprender la relación parte-todo:

• Considerar que una región entera se puede dividir en partes;

• Darse cuenta que el mismo todo se puede dividir en diferente número de partes iguales, y podemos elegir el número de partes;

• Las partes de la partición agotan el todo;

[1] Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1960). *The childs' conception of geometry.* Londres: Routledge and Kegan.

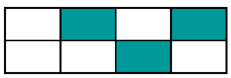
• El número de partes puede no ser igual al número de cortes; por ejemplo con dos cortes podemos hacer cuatro partes de una tarta;

• Todas las partes son iguales;

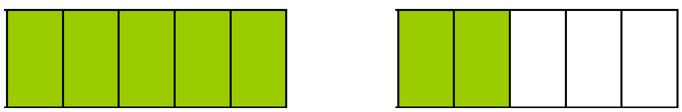
• Cada parte en sí misma se puede considerar como un “todo”;

• El “todo” se conserva, aun cuando se haya dividido en partes.

Para comprobar si los niños comprenden estas ideas se les puede plantear actividades como indicar qué fracción se representa en las siguientes regiones sombreadas:

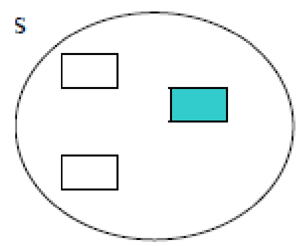


En esta fracción algunos niños creen que la fracción coloreada es 3/5



En esta fracción algunos niños creen que la fracción coloreada es 7/10.

La fracción como parte en un conjunto discreto de objetos



Algunos experimentos sugieren que para los niños es más difícil comprender la idea de fracción en un conjunto discreto de objetos. Por ejemplo, al preguntar a los niños qué fracción representan las piezas coloreadas dentro del siguiente conjunto, el 40% de los niños de 10 años contestan que 1/2 en lugar de 1/3, no considerando el conjunto total como un todo.

Representación de las fracciones como puntos en una recta numérica

El modelo de recta numérica de las fracciones ocasiona dificultades a los niños que no siempre son capaces de pasar de la representación de áreas a la recta o viceversa[2]. El modelo de recta numérica resulta más difícil que los anteriores. En la representación lineal se enfatiza la idea de que una fracción, por ejemplo 4/5 es esencialmente un número, de idéntica naturaleza que los números 0 y 1, pero comprendido entre ambos. A diferencia de las dos representaciones anteriores no se incorpora la idea de relación parte-todo. Una ventaja de la representación lineal es que las fracciones impropias son más naturales y no tan diferentes de las fracciones propias y también se visualiza la idea de que las

---

[2] Novillis, C. F. (1976). An análisis of the fraction concept into a hierarchy of selected subconcepts and the testing of the hierarchical dependencies. *Journal for Research in Mathematics Education,* 7, 131-144.

fracciones “extienden” el conjunto de los números naturales y “rellenan los huecos” dejados por éstos en la recta numérica. De esta forma se enlaza de forma natural con la idea de medida no entera.

La fracción como división indicada de dos números enteros.

Al calcular porcentajes o transformar una fracción en decimales es necesario dividir dos enteros. Esta situación también se presenta en problemas como el siguiente:

Hay que repartir a partes iguales tres tabletas de chocolate entre 5 niños. Sólo un 40 % de los niños de 12 años responde correctamente a este problema, lo que sugiere que el resto no han comprendido que cualquier número entero puede dividirse en cualquier número de partes iguales.

Otras dificultades y errores.

Una primera dificultad en el estudio de las fracciones consiste en que los alumnos atribuyan un significado correcto a la noción de fracción, y por tanto, a cada uno de los enteros que aparecen en la escritura de una fracción. Se trata de una notación nueva para los alumnos de este nivel, ya que hasta este momento sólo conocen los números naturales.

Algunos de los errores más frecuentes que cometen los alumnos tras el estudio del tema, que se manifiestan incluso en niveles de secundaria, son los siguientes:

• Un entero se confunde con su inverso: 1/7 se confunde con 7/1, o bien, 1/7 y 7/1 se consideran como dos escrituras equivalentes.

• Una fracción como ½ se considera menor que la fracción 1/3, argumentando que 2 < 3.

• El conocimiento de los naturales puede ser un obstáculo para el dominio de los números racionales; por ejemplo, algunos niños pueden afirmar que 1/3 < 1/5 explicando que 3 <5.

• La mitad de la fracción 1/6 se designa frecuentemente por la fracción 1/3 (que es en realidad el doble de 1/6), argumentando que la mitad de 6 es 3.

• Para multiplicar entre sí dos fracciones, se les reduce a un común denominador, después se multiplican los numeradores olvidando de multiplicar entre sí los denominadores. Se trata de una confusión entre las reglas de la adición de fracciones y las de la multiplicación.

SITUACIONES Y RECURSOS

De acuerdo a los apartados anteriores, haremos una propuesta de enseñanza con dos secuencias didácticas paralelas: la vía de las situaciones concretas y la de las situaciones formales. La primera es necesaria para establecer el sentido o significado de las fracciones, y también para justificar los hechos numéricos básicos y las técnicas de cálculo. La segunda es necesaria para consolidar las técnicas de cálculo.

Situaciones concretas.

Las actividades introductorias para facilitar "el primer encuentro" con las fracciones se deben apoyar en las diversas representaciones: modelos de áreas, conjuntos discretos, recta numérica, etc.

Por ejemplo, en lo que concierne a la recta numérica, podemos proponer a los niños que tengan que comunicar a otros la posición exacta de ciertos puntos (correspondientes a 1/3 y 5/3, por ejemplo) marcados sobre una semirrecta graduada, en la cual se han marcado claramente los números 0, 1 y 2, los cuales indican la unidad de longitud elegida para graduar la semirrecta.

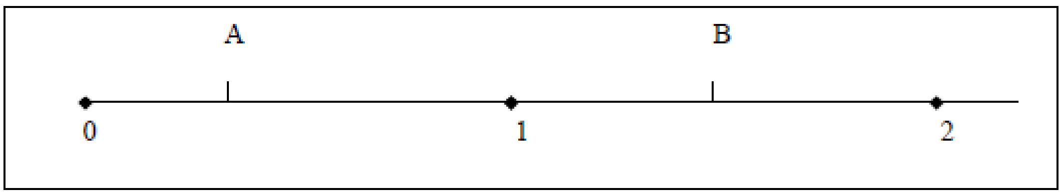


Figura 4. Recta numérica. Autoría propia (2020)

Los niños deberán descubrir en primer lugar la relación entre la posición de estos puntos y la división de la longitud unidad en partes iguales, y después inventar una escritura que les permita comunicar estas posiciones a sus compañeros, los cuales sólo tienen una semirrecta graduada con la misma unidad de longitud sobre la que aparecen marcados el 0, 1, y 2.

En este contexto, la notación de fracción, que podrá ser propuesta por el maestro durante la corrección de la actividad, surgirá como una respuesta a un problema que tiene pleno sentido para los niños y los papeles del numerador y del denominador se distinguirán rápidamente, ya que cada uno proporciona una información necesaria para el posicionamiento correcto del punto.

Esta misma situación se puede también explotar para que los niños "descubran" que las fracciones 1/3 y 2/6, por ejemplo, son dos codificaciones diferentes de la posición de un mismo punto y, por tanto, existen numerosas fracciones equivalentes a una fracción dada. A partir de esto, la investigación de las reglas de simplificación de las fracciones se puede iniciar con fracciones simples.

Este tipo de introducción, además del interés que presenta para dar sentido a la noción y la notación de las fracciones, permite también no limitarse a las fracciones inferiores a la unidad, como ocurre habitualmente con el contexto del reparto de las tortas que suele usarse con frecuencia.

Esta presentación no es suficiente para dar todo su sentido a las fracciones. Se debe acompañar con otras situaciones en las que esta herramienta se use no solamente como fracción de longitud, sino también como fracción de área o de tiempo, y en general con situaciones en las que se pongan en juego los diversos contextos de uso de las fracciones.

Recomendamos una secuencia de situaciones concretas, que el alumno debe resolver por sí mismo. El profesor debe controlar que el niño entiende el enunciado, pidiéndole que lo explique con sus propias palabras y animándole a que encuentre una estrategia de resolución. Es decir, se trata, básicamente, de situaciones a-didácticas (aquel momento del proceso de enseñanza-aprendizaje en que el alumno está comprometido con la resolución de una tarea problemática que asume como propia).

Las variables didácticas de las situaciones de introducción de las fracciones son las siguientes:

• *Significado de las fracciones:* parte- todo, comparación parte- parte, división de dos números, comparación de dos medidas, punto en la recta numérica, etc.

• *Tipos de fracciones:* igual- distinto denominador, menores mayores que la unidad, enteras o no enteras, denominadores múltiplos unos de otros o no, etc.

• *Grado de contextualización de la situación:* Situación que se refiere a materiales presentes en el aula y con el niño como actor. Situación hipotética contextualizada con material a disposición del niño para que pueda efectuar una representación simbólica. Situación hipotética contextualizada sin material a disposición del niño.

• *Tipo de material utilizado:* Estructurado o no estructurado.

• *Posición de la incógnita en las operaciones:* En el primer término, el término inicial o uno de los términos parciales.

• *Número de datos:* Dos, tres o más.

Situaciones formales. Aprendizaje de algoritmos.

En estas situaciones se presenta al alumno operaciones formales con las fracciones, es decir, ejercicios del tipo: 5/7+4/5, etc. En un primer momento se animará al niño a hallar sus propias estrategias, para dar sentido a las operaciones. Rápidamente se pasará a utilizar diversas representaciones (áreas, conjuntos, recta numérica, diagramas en árbol) para facilitar la comprensión y adquisición de técnicas de cálculo. Las variables didácticas de las situaciones son las siguientes:

• *Tipo de operación:* suma, resta, multiplicación y división.

• *Dirección de la operación:* Directa (por ejemplo, 2 / 5 x 1/4 = ? Inversa (por ejemplo, ? x 2/ 5 = 1/10

• *Tipos de fracciones, tamaño de los términos y del resultado de la operación:*

1. Suma y resta de fracciones de igual denominador;
2. Suma y resta de fracciones, denominadores múltiplos uno de otro;
3. Suma y resta de fracciones con denominadores no múltiplos, fácilmente descomponibles en factores;
4. Suma y resta de fracciones cualesquiera;
5. Multiplicar /dividir una fracción por un entero;
6. Multiplicar /dividir dos fracciones;
7. Operaciones combinadas

• *Técnica de cálculo:* Uso de material o representaciones gráficas, técnica escrita.

• *Tipo de material o representaciones usadas;* conjuntos de objetos, modelos de áreas, recta numérica, etc.

Modelos gráficos para el estudio de las fracciones.

A lo largo del tema hemos mencionado algunas representaciones gráficas mediante las cuales se expresan situaciones de uso de las fracciones. El uso de estas representaciones es una opción del profesor, por lo que se trata de una variable didáctica de las situaciones concretas en el estudio de las fracciones.

Modelos de áreas. Una figura, principalmente rectangular o circular se divide en partes iguales, sombreando la parte correspondiente a la fracción representada. ¿Qué fracción expresa la relación entre el área de la superficie sombreada y la superficie del rectángulo mayor? ¿Cuánto mide el área sombreada si usamos como unidad de medida el rectángulo mayor?

Este tipo de situaciones de medida o comparación de áreas (con figuras rectangulares o circulares) se pueden utilizar como modelos de otras situaciones de contextos no geométricos. Por ejemplo, "Tenemos que repartir 120 euros entre 12 personas. ¿Qué fracción del total corresponde a 8 personas? ¿Cuántos euros corresponden a estas 8 personas?"

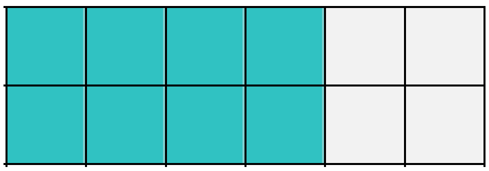


Figura 5. Gráfica de fracción. Autoría propia (2020)

Esta situación se puede representar "visualmente" con el gráfico o modelo de áreas anterior interpretando que el rectángulo mayor "representa las 12 personas (el todo o unidad), y la parte sombreada a las 8 personas.

Representación mediante conjuntos. Cuando el conjunto que se quiere dividir es discreto y el número de objetos es múltiplo de las partes, una representación de los objetos puede visualizar el problema de reparto.

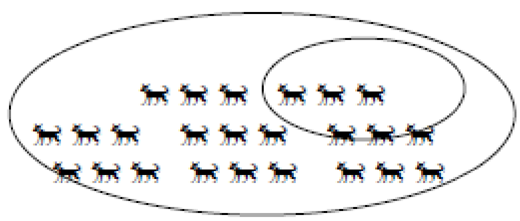


Figura 6. Representación en conjuntos. Autoría propia (2020)

Modelos lineales. Al igual que en el caso de los números naturales, podemos visualizar las fracciones a lo largo de una recta. Tomamos en ella una cierta longitud como unidad a repartir, y a partir de ella representamos la fracción.

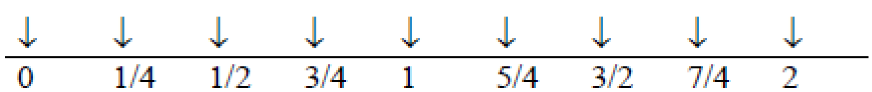


Figura 7. Recta numérica. Autoría propia (2020)

Acerca de las dificultades para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones.

Carmen Martínez y Margarita Lascano (2001), nos presenta en su artículo, unos atributos que se deben tener en cuenta para la interpretación de la fracción como relación parte-todo, propuestos por Piaget, Inhelder y Szeminska, y que caracterizan dicha relación:

1. Un todo está compuesto por elementos separables. Una región o superficie es vista como divisible.

2. La separación se puede realizar en un número determinado de partes. El "todo" se puede dividir en el número de partes pedido.

3. Las subdivisiones cubren el todo; ya que algunos niños cuando se les pedía dividir un pastel entre tres muñecos, cortaban tres trozos e ignoraban el resto.

4. El número de partes no coincide con el número de cortes.

5. Los trozos – partes- son iguales. Las partes tienen que ser del mismo tamaño – congruentes -.

6. Las partes también se pueden considerar como totalidad (un octavo de un todo se puede obtener dividiendo los cuartos en mitades).

7. El "todo" se conserva. (p. 160)"

Estos atributos se tienen en cuenta para realizar el material concreto, ya sea el de la etapa de diagnóstico como el de utilización del TANGRAM, haciendo énfasis en que en el atributo No. 5 no aplica puntualmente en el juego del TANGRAM.

Acerca del trabajo con fracciones, Martínez y Lascano (2001), nos explican que:

"Al trabajar sobre fracciones como relación parte-todo, es necesario realizar acciones sobre un todo (unidad); una vez que el todo ha sido o está siendo rajado, cortado, rebanado, roto o dividido y coloreado en partes iguales, o se imagina o piensa como si lo fuera, queda constituida la fracción. Una vez constituida, ésta pasa a ser el resultado de una acción física o mental. Surge entonces, la necesidad de comunicar la acción y su resultado a través del lenguaje que puede ser oral, gráfico, escrito en palabras y/o escrito en símbolos numéricos propios de las matemáticas. Así pues, aparecen las diversas representaciones que ponen de manifiesto la relación que se establece entre las partes y el todo y se dota de sentido y significado a la fracción en su interpretación como relación parte-todo y al símbolo matemático que la representa. (p. 162)"

Para el ejercicio del material concreto se observará si los estudiantes aplican el conocimiento de los atributos de las fracciones, de manera intuitiva, para comprender el concepto de fracción.

Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones.

En su artículo, Darío González del Olmo (2015), citando a Morales (2011), nos presenta la importancia del concepto de fracción en el aprendizaje de los estudiantes, destacando la importancia de los saberes previos:

> "Estos son importantes ya que, para lograr un aprendizaje efectivo, los nuevos conocimientos que se pretenden que el alumno construya han de apoyarse en los que ya posee. Conocimientos que el alumno ha tenido la oportunidad de adquirir en cursos anteriores. Es de esperar incluso que se haya familiarizado con el concepto de fracción, ya que la comprensión de este concepto es un propósito planteado desde los primeros años de escolarización. (p. 9)"

En la propuesta del manejo del TANGRAM, es de esperar que los estudiantes evaluados tengan unas nociones de fracción, por eso se tomó a estudiantes de grado 4° que, durante los meses de septiembre y octubre, trabajan el tema de fracciones en su malla curricular.

Además, nos aclara la comprensión del concepto de fracción, considerando cinco interpretaciones: La comprensión del concepto de fracción depende de cómo se entienda cada uno de sus significados, por lo que es importante tener claro cada uno de ellos. Debido a las múltiples interpretaciones que admiten las fracciones, el objetivo de su enseñanza debe ser que los alumnos lleguen a dotar de significado a cada una de ellas, pero también que logren establecer relaciones entre dichas interpretaciones. Además, la existencia de tal variedad de interpretaciones hace necesaria una variedad correspondiente de experiencias (Kerslake, D., 1986).

Siguiendo el trabajo de (Dickson, Gibson & Brown, 1991), vamos a considerar cinco interpretaciones de las fracciones:

Como sub-áreas de una región unitaria (partes de un todo).

Como subconjuntos de un conjunto de objetos discretos.

Como puntos de una recta numérica.

Como resultado de una operación de división.

Como método de comparación de los tamaños de dos conjuntos, o de dos medidas. (p. 13)"

Continuando con su investigación, González del Olmo nos comenta los errores más comunes en el uso de las fracciones, que se consideran también en el trabajo realizado con los estudiantes para la aplicación, tanto del material concreto de diagnóstico, como el material diseñado con el TANGRAM. Este tipo de errores los resumiré en la siguiente tabla, de acuerdo a la categorización y clasificación presentada por González del Olmo, como los errores más importantes aparecidos en el uso de las fracciones, teniendo en cuenta los estudios por él destacados.

Tabla 1

Clasificación de los errores en el uso de las fracciones.

CLASIFICACIÓN EN EL USO DE LAS FRACCIONES			
TIPO DE ERROR	CARACTERÍSTICAS	SUBCATEGORÍAS	FACTORES
ERRORES POR DESCUIDO Y DISTRACCIÓN	Errores que aparecen de forma esporádica y aleatoria.		Falta de concentración y/o despistes de los alumnos.
ERRORES POR DESCONOCIMIENTO DE LA RESPUESTA	Errores atribuidos a carencias en los	Simplificación incompleta	Falta de comparación de fracciones

	conocimientos previos.		(fracciones equivalentes).
		Operaciones con enteros	Producto de despistes o de la precipitación.
		Jerarquía de las operaciones	No realizar las operaciones y/o transposiciones en el orden correcto
ERRORES POR DEFECTOS EN LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO	Errores en los que no está claro si se deben a fallos en procesos aritméticos o a carencias en los conceptos relacionados con el tema de fracciones.	Error con la conmutatividad de las operaciones.	Errores cometidos al aplicar la propiedad conmutativa en la resta, invirtiendo el orden de los números en las operaciones o en la división.
		Error en la ordenación de fracciones	El conocimiento de los números naturales puede ser un obstáculo para el aprendizaje de los números racionales, al extender las propiedades de los primeros a estos últimos.

		Error en la comparación cualitativa incorrecta	Errores que comete el estudiante llegando a conclusiones equivocadas, al asociar de manera incorrecta algunas ideas. Dificultad en relacionar la representación verbal y numérica de una fracción.
		No considerar legítimo dividir o restar el número menor por el mayor.	En un estudio realizado por A. Brown el 51% de los estudiantes de 12 años respondieron que no se puede dividir 20 por el número 16.
		Errores en relacionar multiplicar con ampliar y dividir con reducir.	Aprendizaje erróneo e incompleto de los conceptos de división y de multiplicación de fracciones. Es complicado con para los estudiantes

			comprender que el producto de dos fracciones puede ser menor que cualquiera de ellas.
		Extrapolación de cálculo de los naturales a las fracciones.	Los estudiantes utilizan estrategias validas solo con los números naturales para realizar cálculos con fracciones.
		Error relacionado con la equivalencia de las fracciones.	Poco éxito en la búsqueda de una fracción equivalente entre dos fracciones dadas.
ERRORES POR APLICACIÓN SISTEMÁTICA DE PROCEDIMIENTOS ERRÓNEOS	Errores que se deben a que los estudiantes no han comprendido en su totalidad las reglas que deben seguir a la hora de operar con fracciones.	Sobresimplificación.	Los estudiantes aplican la simplificación del producto a la suma o juntan términos sin considerar las operaciones que se deben hacer.
		Error en el algoritmo suma.	Error producido principalmente por mezclar en este

			algoritmo con el de multiplicación.
		Error en el algoritmo multiplicación.	Incluye errores en los que el estudiante calcula el m.c.m igualando denominadores de las fracciones para posteriormente multiplicar los numeradores.
		Multiplicación cruzada incorrecta.	Error recurrente cuando los estudiantes se encuentran con un natural multiplicando una fracción, a menudo multiplican tanto numerador como denominador por dicho número natural.
		Común denominador incorrecto.	Error en las operaciones de cálculo (m.c.m.) o al considerar la suma de los

			denominadores como tal.
		División o multiplicación errónea.	Errores que los estudiantes comenten al aplicar el algoritmo de la división o de la multiplicación de fracciones (combinación de los dos).
		Dividir en lugar de multiplicar.	Los estudiantes utilizan el algoritmo de división en las multiplicaciones y viceversa.

Nota: Autoría propia, datos adaptados a partir de los conceptos presentados por González del Olmo (2020)

Metodología

Como hemos visto, existen diferentes errores que se deben tener en cuenta en el proceso de aprendizaje de las fracciones, ya que estos pueden ralentizar o distorsionar la comprensión del concepto en los estudiantes.

Esta investigación tiene un enfoque ***fenomenológico – hermenéutico*** ya que se busca una perspectiva particular de la interpretación de la fracción, en nuestro caso la fracción propia, y se realiza por medio de la exploración del concepto básico que se tiene de la fracción y este concepto llevarlo a el juego del tangram, que, mirándolo desde esta perspectiva, también nos muestra cómo se puede dividir una unidad.

Este enfoque se tomará de tipo ***estudio de caso***, ya que se inicia con una exploración de la población que se tiene como base para la investigación, atendiendo principalmente a la detección de los errores mencionados. Esta exploración se realizará por medio de una prueba diagnóstico, en la cual el estudiante debe escribir la fracción que representa la parte de color en cada una de las situaciones.

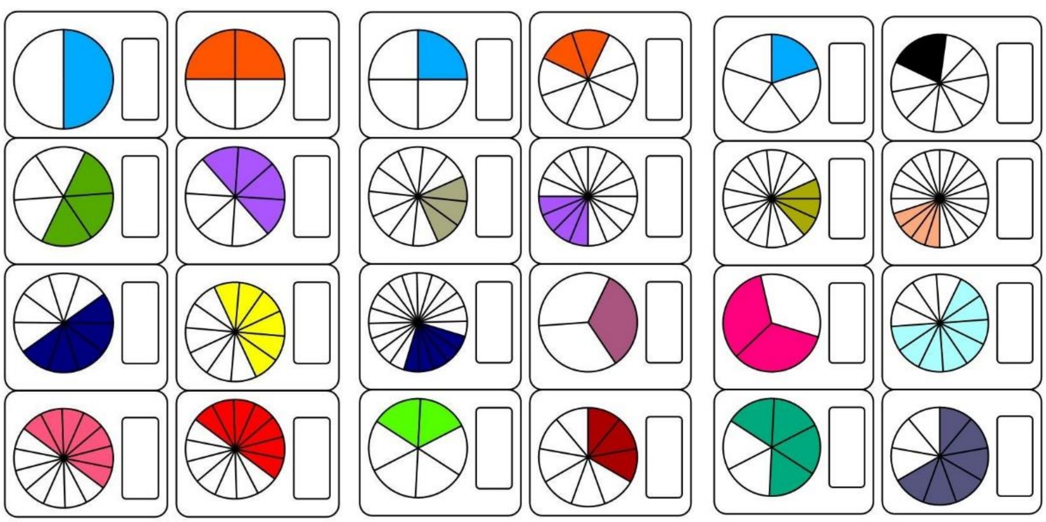


Figura 8. Ejercicios base para la etapa de diagnóstico. Autoría propia (2020)

Este cuestionario se realizó con cuatro estudiantes de grado 4°, donde se hace una introducción oral por parte del investigador, explicándoles las situaciones que se presentan y a la cual ellos ya están familiarizados. A unos estudiantes se les entregó la copia en color y a otro en blanco y negro. Los resultados obtenidos fueron óptimos ya que los estudiantes reconocieron cada una de las fracciones que se representaban.

Seguidamente se realizaron ejercicios utilizando las fichas que representan fracciones de una unidad cuadrada.

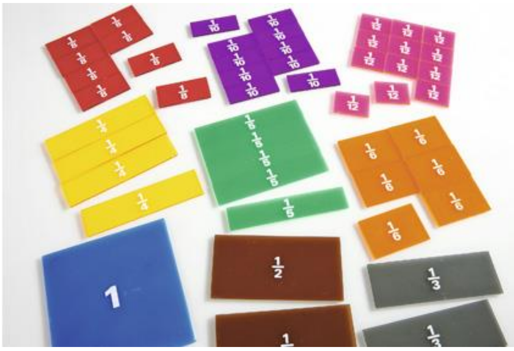


Figura 9. Set de fracciones. Autoría propia (2020)

Con estos ejercicios se observan las diferentes fracciones en el que puedo dividir el todo (unidad cuadrada), haciendo relaciones por color y por tamaño. El taller está dividido en dos secciones, interpretación y argumentación y razonamiento y argumentación.

En la primera sección se propone al estudiante tomar las piezas de cada color y contar cuantas de éstas completan el cuadrado base (azul), para después definir cuanto representa una sola pieza de cada color.

Tabla 2.

Tabla utilizada para la sección de interpretación y representación.

PIEZA	CANTIDAD DE PIEZAS	FRACCION QUE REPRESENTA UNA DE LAS PIEZAS
ROJO	8	$\frac{1}{8}$
AMARILLO		
VERDE		
MORADO		
NEGRO		
CAFÉ		
NARANJA		
ROSADO		

Nota: Autoría propia (2020)

Para el desarrollo de esta sección, al estudiante se le dificultó expresar la fracción que representaba una sola pieza, escribiendo fracciones como 8/1, 8/8. A lo cual se les explica que una pieza de color hace parte del todo (azul), para lo cual el numerador es 1 y el denominador es las veces que cabe esa pieza dentro del cuadrado.

Seguidamente se propone realizar diferentes equivalencias entre cada una de las partes, estableciendo relaciones de orden (menor que y mayor que) y algunas sumas que se pueden realizar con estas fichas. En esta etapa se observó que los estudiantes comenten el error de interpretar el orden de una fracción comparando solo su denominador, por ejemplo, que 1/8 es mayor que 1/4, siendo lo contrario y se les dificulta concluir que dos piezas de 1/8 forman 1/4, porque al realizar la suma sin necesidad de utilizar las piezas, algunos estudiantes suman tanto numeradores como denominadores, indistintamente que sean o no fracciones homogéneas.

Tabla 3.

Tabla utilizada para la fase de razonamiento y argumentación.

CANTIDAD DE PIEZAS DE UN COLOR		EQUIVALE A	CANTIDAD DE PIEZAS DEL OTRO COLOR		RESULTADO
2 moradas	$\frac{2}{10}$	EQUIVALE A	Una verde	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$
		EQUIVALE A			
		EQUIVALE A			
		EQUIVALE A			
		EQUIVALE A			

Nota: Autoría propia (2020)

En la siguiente etapa de exploración, se realiza concretamente el trabajo con el juego del TANGRAM, proponiendo las mismas actividades anteriores: equivalencias, relaciones de orden (menor que, mayor que) y sumas.

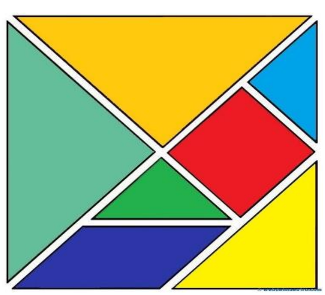


Figura 10. Tangram. Autoría propia (2020)

En esta etapa se observará la abstracción del estudiante para comprender que la unidad se puede dividir en diferentes partes y que cada una de ellas tiene una relación o equivalencia con las demás.

En la etapa de interpretación y representación se busca que el estudiante refuerce y comprenda el concepto de fracción, de la misma forma que el ejercicio anterior, se pregunta cuantas piezas de cierta forma recubren el cuadrado sin superponerse, para lo cual se hace el proceso en dos partes: primero se les da cada una de las piezas para que ellos cuenten mentalmente cuantas caben en el cuadrado, después se les da el total de piezas que formarían el cuadrado para que ellos comprueben sus estimaciones.

Uno de los inconvenientes observados fue el de saber cuántas veces cabe el paralelogramo en el cuadrado ya que para ello toca dividir la pieza en triángulos pequeños para hacer la equivalencia.

Tabla 4.

Tabla utilizada para la fase de interpretación y representación con el TANGRAM.

PIEZA	CANTIDAD DE PIEZAS QUE CABEN	FRACCION DEL CUADRADO INICIAL
TRIANGULO PEQUEÑO	16	$\frac{1}{16}$
TRIANGULO MEDIANO		
TRIANGULO GRANDE		
CUADRADO		
PARALELOGRAMO		

Nota: Autoría propia (2020)

Para la fase de razonamiento y argumentación se les pide a los estudiantes que comparen las fracciones que representan las figuras que se mencionan en el cuadro y determinar si son equivalentes.

Tabla 5.

Tabla utilizada para la fase de razonamiento y argumentación con el TANGRAM.

CANTIDAD DE PIEZAS DE UN TAMAÑO		CANTIDAD DE PIEZAS EL OTRO TAMAÑO		RESULTADO	
2 triángulos grandes	$\frac{2}{4}$	3 paralelogramos	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{4}=\frac{1}{8}$	FALSO
6 triángulos medianos		12 cuadrados			

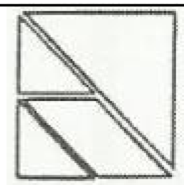
Un triángulo grande		3 paralelogramos			
Un triángulo pequeño y un triángulo grande		5 triángulos pequeños			

Nota: Autoría propia (2020)

Para la actividad de suma con fracciones se pide al estudiante que forme 5 cuadrados con las piezas del tangram, las dibuje y escriba la expresión de suma con su resultado, dependiendo de las piezas que utilizó, siempre buscando reducirlas a la pieza menor, el triángulo pequeño, que representa 1/16.

Tabla 6.

Tabla utilizada para la fase de razonamiento y argumentación con el TANGRAM para la suma de fracciones.

CUADRADO	EXPRESION	RESULTADO
	$\frac{1}{4}+\frac{2}{16}+\frac{1}{8}$	$\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$

Nota: Autoría propia (2020)

Conclusiones

Con los resultados de la prueba diagnóstico se pudo observar que los estudiantes de grado 4°, manejan el concepto de fracción e interpretan las partes tomadas de un todo.

Cuando se trabaja con un material concreto para explicar el concepto de fracción es necesario hacer una introducción de la finalidad del material, para que los estudiantes se familiaricen e interpreten lo que se quiere conseguir con este material. También demostrarles cuando una fracción es mayor que otra, de manera tangible, ya que el estudiante tiende hacer esta comparación observando que número es mayor que otro, sin tener claro que partes del todo estamos tomando. Por ejemplo, piensan que 3/16 es mayor a 3/8 solo porque 16 es mayor a 8, pero deben interpretar que 16 representa muchas divisiones en la misma unidad, por tanto, es una parte mucho más pequeña.

Al hacer el trabajo con el TANGRAM, los estudiantes ya estaban más familiarizados con la finalidad del ejercicio, pudieron deducir oportunamente la fracción que representaba el paralelogramo, ya que contaban con muchas piezas que podían tomar como base para hacer la deducción. Así mismo, con la expresión de sumas de fracciones a partir de las piezas del TANGRAM, dividían cada una de las piezas en la pieza más significativa (triángulo pequeño) para hallar el resultado.

Referencias

Martínez, C., Lascano, M. (2001). Acerca de dificultades para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. Revista EMA, 6(2), pp. 156-179.

González, D. (2015). Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones: un estudio con alumnos de 12/13 años en Cantabria. Recuperado de: https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/6903/GonzalezdelOlmoDario.pdf?sequence=1

Godino, J. (2004). Didáctica de las matemáticas para maestros. Proyecto Edumat –maestros. DBA (Derechos básicos de aprendizaje). Recuperado de: http://aprende.colombiaaprende.edu.co/es/siemprediae/86404