Notas de clase

Lógica simbólica con aplicaciones a problemas filosóficos contemporáneos

Daniel Sebastián Buitrago Arria

Filosofía

Humanidades y Ciencias sociales

Editorial UNIAGUSTINIANA

Nº 13

Lógica simbólica con aplicaciones a problemas filosóficos contemporáneos

Colección Notas de Clase, No. 13

doi: 10.28970/ua.nc.2018.n13

Equipo editorial

Ruth Elena Cuasialpud Canchala, *Coordinadora editorial y de difusión*

Alejandro Farieta-Barrera, *Asistente editorial*

Ángela Marcell Cruz, *Correctora de estilo*

Juan Sebastián Bazzani Delgado, Diseño y diagramación

Campus Tagaste, Av. Ciudad de Cali No. 11B-95

literaturagris@uniagustiniana.edu.co

Lógica simbólica con aplicaciones a problemas filosóficos contemporáneos

Daniel Sebastián Buitrago Arria

Magíster en Filosofía Contemporánea,
Universidad de San Buenaventura, Colombia

Docente de tiempo completo,
Universitaria Agustiniana- Uniagustiniana, Colombia

Correo electrónico institucional: daniel.buitrago@uniagustiniana.edu.co

Resumen general

La presente es una nota de clase que pretende servir de apoyo pedagógico para el desarrollo de los contenidos de la asignatura Lógica II. En particular, la nota tiene el propósito de acompañar al estudiante en la identificación de la validez de los argumentos mediante la simbolización de términos. Para ello, además de las explicaciones teóricas, cuenta con un repertorio de ejercicios para evaluar el avance de los estudiantes en estas temáticas. Adicionalmente, se presentan algunos cuestionamientos que proponen la filosofía contemporánea y la filosofía de la lógica en torno a algunos de los conceptos de la lógica simbólica.

Palabras clave: proposición, lógica formal, nota de clase, validez, argumentación, simbolización.

Cómo citar:

Buitrago A., D. S. (2018) *Lógica simbólica con aplicaciones a problemas filosóficos contemporáneos*. Notas de clase 13. Bogotá: Uniagustiniana. doi: 10.28970/ua.nc.2018.n13

Tabla de contenido

Introducción

El objetivo de esta nota de clase es proporcionar a los estudiantes de la Licenciatura en Filosofía un material de clase de calidad para el aprendizaje de los contenidos de la asignatura Lógica II, junto con algunos apartados referentes a aplicaciones de estos contenidos a problemas filosóficos contemporáneos.

La pertinencia de la nota de clase se define a partir de su articulación con la enseñanza del curso Lógica II, que actualmente oriento y para el que se pretende utilizar como material de clase. Sumado a esto, considero pertinente y relevante que los estudiantes aprecien la aplicación de los conceptos, principios y herramientas lógicas a los problemas filosóficos contemporáneos, ya que esto les brinda mejores perspectivas para abordar las diferentes discusiones actuales.

Con esta nota de clase se pretenden desarrollar los contenidos temáticos de la asignatura Lógica II del programa de Licenciatura en Filosofía, con un énfasis especial en la identificación de la validez en los argumentos. Se agregan unos apartados sobre la aplicación de estos contenidos a problemas filosóficos contemporáneos y a algunos puntos sobre filosofía de la lógica. Por tal razón, es preciso aclarar que se entenderá aquí *lógica* como el estudio de la noción de validez. Los contenidos a tratar, de manera general, van desde las nociones básicas de la lógica proposicional, su simbolización, los conectores, las tablas de verdad, las negaciones y las demostraciones.

Se pretende entonces que esta nota de clase no solo sirva como un recurso bibliográfico para el aprendizaje de los principales contenidos de la asignatura, sino que también permita mostrar la gran relevancia que tiene actualmente la lógica simbólica a propósito de problemas filosóficos contemporáneos. En adición, la nota de clase pretende mostrar a la lógica simbólica como una herramienta que sirve para pulir la forma de argumentar en filosofía y que, por esto, será de gran utilidad a quien esté interesado en una buena formación filosófica.

Esta nota de clase comienza con una breve reseña histórica de la lógica simbólica, para luego exponer las bases conceptuales de la lógica proposicional y su formalización a través de la simbolización para, acto seguido, tratar temas centrales como las tablas de verdad, las negaciones y las demostraciones.

Cada apartado viene acompañado con ejemplos y una breve sección de ejercicios para reforzar el aprendizaje de los conceptos presentados. Sumado a esto, se presentan dos aplicaciones: una en la problematización del condicional y otra frente a las paradojas.

1. Breve reseña histórica de la lógica formal

De acuerdo con Volker Peckhaus (en Aberdein et al., 2009), la denominada *lógica formal* tiene sus inicios en Gran Bretaña en la segunda mitad del siglo XIX. Y surge, en su mayor parte, gracias a aportes de índole matemática antes que filosófica (p. 159). Más aún, no es posible considerar el desarrollo de la lógica moderna sin tener en cuenta el desarrollo de la matemática moderna, de naturaleza eminentemente abstracta y simbólica[1]. Sin embargo, como el mismo Peckhaus aclara, esta rama de la lógica no surgió "de la nada". Contrario a lo que muchos británicos de la época quisieron dar a entender, la lógica formal debe mucho al desarrollo que los filósofos habían hecho de la lógica misma hasta el siglo XVIII, principalmente el proyecto de universalización de Leibniz (Peckhaus, 1997).

Aun así, debido a que estudiar las influencias filosóficas sobre la lógica simbólica requeriría una investigación mucho más amplia[2], me remitiré únicamente a las influencias matemáticas de la época, con la intención de determinar aquellos elementos no estrictamente filosóficos que dieron lugar a esta perspectiva simbólica de la lógica y que le otorgaron precisamente ese carácter distintivo frente a los desarrollos filosóficos previos sobre esta ciencia.

Con esto en mente, a continuación se estudiará la influencia de los aportes a la lógica formal por parte de las escuelas matemáticas británicas y alemanas del siglo XIX, con especial énfasis en George Boole, Augustus De Morgan y Ernst Schröeder.

---

1 Para mayor información acerca de la relación entre el desarrollo de la lógica simbólica y de la matemática del siglo XIX ver Grattan-Guinness (1994) y Peckhaus (1997).

2 El lector interesado en rastrear de forma más completa los orígenes y la evolución de la lógica simbólica puede consultar, por ejemplo, la obra de Lenzen (2004).

1.1. *La introducción del simbolismo en la lógica: George Boole (1815-1864)*

En las comunidades matemáticas de Gran Bretaña del siglo XIX, especialmente en la denominada Red Cambridge (*Cambridge Network*) y en la Sociedad Analítica (*Analytical Society*), surge una tendencia que pretende dar una especial importancia al simbolismo en la matemática. Esta tendencia es impulsada principalmente por trabajos como el de George Peacock, *A Treatise on Algebra* (1830) y el de Duncan Gregory, *Examples of the Processes of the Differential and Integral Calculus* (1841) en donde se introduce y desarrolla el concepto de álgebra simbólica que el mismo Duncan define como "la ciencia que estudia la combinación de operaciones definida no por su naturaleza, esto es, por lo que son o por lo que hacen, sino por las leyes de combinación a las que están sujetas" (Gregory, 1839, p. 208). Esta propuesta influyó profundamente en el pensamiento del matemático inglés George Boole, quien observó que esta nueva perspectiva permitiría entender los símbolos en matemática desde un enfoque más abstracto y no solo como una generalización de operaciones ya dadas; ver al símbolo como algo que permite estudiar cualquier combinación de operaciones no en virtud de las ideas previas que se tienen de dichas operaciones, sino con base en cómo se definan sus leyes de combinación. Esta liberación del símbolo en la matemática va a lograr que la simbolización de una teoría se posicione no solo independientemente de la noción de cantidad (tan fuertemente arraigada en la matemática de la época), sino incluso independientemente de cualquier interpretación que se le quiera dar a los símbolos. Al llevar más lejos esta idea, Boole llegó a convencerse de que la simbolización en la matemática estaba siendo limitada y subutilizada, en tanto que únicamente se le utilizaba para representar cantidades y no se estaba explorando la posibilidad de que representara nociones universales (Aberdein et al., 2009, p. 165). Esta última característica fue la fortaleza clave que George Boole identificó en este nuevo andamiaje del álgebra simbólica, y que, según él, permitiría una exitosa reducción que lograría la solución de diversos problemas en distintas áreas de las ciencias bajo un mismo esquema: la de una teoría fundamental y general, netamente simbólica, sin interpretación *a priori*, que sin embargo fuera aplicable a cualquier área, según como se interprete su simbología:

> Aquellos que estén familiarizados con el actual estado de la teoría del álgebra simbólica son conscientes de que la validez de los procesos de análisis no depende de la interpretación de los símbolos que son empleados, sino solamente de las leyes de su combinación. Todo sistema de interpretación que no afecte la verdad de las relaciones supuestas es igualmente admisible, y es así que el mismo proceso puede, bajo un esquema de interpretación, representar la solución a una cuestión sobre las propiedades de los números; bajo otro, la solución a un problema geométrico; bajo un tercero, la solución a un problema de dinámica u óptica (Boole, 1847, p. 3)[3].

Para probar esta tesis, Boole postula que el origen de todas las formulaciones teóricas, tanto en las ciencias exactas como en la matemática, se puede rastrear a un solo conjunto de *leyes del pensamiento* que reflejan la manera correcta de razonar acerca del mundo. Es decir, aquellos principios fundamentales de todo conocimiento se encuentran en la lógica. Dado que la lógica no es otra cosa que operaciones (intelectuales o mentales) con elementos llamados enunciados, oraciones o proposiciones, debería ser susceptible de simbolizarse, y con ello, hallar la estructura simbólica fundamental del pensamiento humano. En otras palabras, si el simbolismo del

3 La traducción es propia.

álgebra simbólica, una vez liberado de su encasillamiento a la noción de cantidad, permite emplear los símbolos para identificar las estructuras conceptuales más fundamentales y generales, ¿por qué no usarlo para descubrir la estructura más fundamental y general de todas: la del pensamiento mismo? Este es precisamente el propósito que se fija George Boole en su obra *An Investigation of The Laws of Thought* (1854):

> El propósito del siguiente tratado es, por un lado, investigar las leyes fundamentales de aquellas operaciones de la mente bajo las cuales se ejerce el razonamiento; por otro lado, dar una expresión a éstas en el lenguaje simbólico de un cálculo, y sobre esta formulación, establecer la ciencia de la lógica y construir su método (...) y, finalmente, recolectar, a partir de los numerosos elementos de verdad sacados a la luz en el curso de estas indagaciones, algunos detalles concernientes a la naturaleza y constitución de la mente humana. (Boole, 1854, p. 1)[4]

De hecho, Boole creyó alcanzar este propósito con su obra, lo que lo llevó a pensar que el poder determinar la estructura misma del pensamiento (a través de la simbolización de la lógica), debía irremediablemente erradicar a la lógica como rama de la filosofía, ya que la filosofía se interesa en buscar las causas últimas, la naturaleza del ser y el porqué definitivo de todo, cuestionamientos que, por lo general, terminan en incertidumbres; mientras que las ciencias exactas, y en particular la matemática, permiten determinar y establecer las respuestas a sus cuestionamientos de forma precisa, clara y contundente. Por tanto para Boole, como consecuencia de su análisis y de su éxito en la determinación de la estructura del pensamiento, esto es, de la lógica, se deduce que esta ciencia (la

4 Íbidem.

lógica) no debería asociarse a la metafísica sino a la matemática (Boole, 1847, p. 13)

1.2. La simbolización del silogismo: De Morgan (1806-1871)

Augustus De Morgan fue otro matemático inglés que fue influenciado por el renovado papel del simbolismo que proponía el trabajo de Peacock. Sin embargo, a diferencia de Boole, De Morgan estaba interesado únicamente en la simbolización de algunos procesos lógicos, mas no en reducir la lógica a un cálculo (Aberdein et al., 2009).

A pesar que De Morgan utiliza también la herramienta del álgebra simbólica, el matemático inglés se ocupa de proponer una teoría de simbolización de los silogismos, que inicia con una representación simbólica de la cópula (De Morgan, 1847):

P)Q: Todo P es Q.

P.Q: Ningún P es Q.

PQ: Algunos Ps son Qs.

P:Q: Algunos Ps no son Qs.

En lo sucesivo de su trabajo estudiará esencialmente la cópula en un sentido netamente abstracto y describirá propiedades como la transitividad y la conmutatividad de la misma. Sumado a esto, postulará sus famosas leyes[5] afirmando que el contrario de *PQ* es *p,q*, y el de *P,Q* es *pq*, donde *p* es el contrario de *P* y *q* el de *Q* (De Morgan, 1847).

5 De acuerdo con Aberdein et. al. (2009), las llamadas *leyes de Morgan* podían encontrarse ya en el trabajo de Ockham.

1.3. La lógica algebraica: Schröeder (1841-1902)

Ernst Schröeder entra en escena en un momento de discusión sobre el rol de la lógica en la filosofía. En aquel entonces en las universidades alemanas se estudiaba, por un lado, la posición de Kant que sostenía que desde Aristóteles la lógica no había retrocedido, pero tampoco había avanzado. Por otro lado se impartía la visión de Hegel, según la cual esta esterilidad se debía a que la lógica necesitaba reformularse y convertirse en un lenguaje de ideas puras que coincidiera con la metafísica (Aberdein et al., 2009). El turno era ahora tanto de hegelianos como de neokantianos para resolver dos cuestiones centrales: 1. El problema de los fundamentos de la lógica y su relación con el psicologismo[6] (Rath, 1994); 2. La aplicabilidad de la lógica en cuanto a metodología en la filosofía. Sin embargo, de acuerdo con Peckhaus (en Aberdein et al., 2009), esto tuvo dos efectos inesperados: por un lado, la separación de la psicología como rama independiente de la filosofía, y por otro, la adopción de la lógica por parte de la matemática.

Es en este ambiente en el que Schröeder se propone investigar los fundamentos de todas las ciencias bajo el ideal de encontrar una *ciencia general*. El matemático alemán creía que, por ejemplo, la física, considerada la ciencia universal por excelencia, se podía estructurar perfeccionando la matemática, específicamente la geo-

6 De acuerdo con Kusch (2015), el psicologismo se puede entender como aquel señalamiento filosófico según el cual se atribuyen características o explicaciones psicológicas a entidades que no se consideran de naturaleza psicológica. En este caso la discusión gira en torno a la pregunta de si las leyes de la lógica se pueden o no explicar desde la psique humana propiamente. De ser este el caso, las leyes de la lógica no tienen un carácter objetivo universal, sino que se reducen a procesos psicológicos particulares de la mente humana. Los autores que más enfáticamente rechazan la afirmación de que las leyes de la lógica pueden reducirse a la psicología son Frege y Husserl. Para más información puede consultarse a Beiser (2009).

metría y la aritmética. Lo anterior lo llevó a pensar que en realidad había que reformar lo que fundamenta todas estas ciencias: la lógica (Peckhaus, 1997).

De forma similar a Boole, pero de manera independiente, Schröeder cree en la existencia de un lenguaje universal que fundamenta todo el conocimiento teórico, pero que además este lenguaje puede expresarse de manera simbólica usando el álgebra en donde sea posible estudiar cualquier propiedad de manera abstracta mediante operaciones con símbolos, y no bajo el contenido semántico de lo que se simboliza. Este lenguaje universal, creía Schröeder, debía darse necesariamente de forma simbólica y no como lenguaje natural[7].

Al igual que Peacock y Boole, Schröeder creía que la forma de encontrar este lenguaje universal era a través de una álgebra absoluta, cuyas definiciones no estuvieran restringidas a preconcepciones operativas, sino que representaran las formas más generales posibles del pensamiento que, en manos del álgebra, se convertiría en una dinámica meramente formal y operativa; esto resume el propósito de Schröeder (citado en Aberdein, 2009) que era, en sus palabras:

> Concebir a la lógica como una disciplina de cálculo, especialmente haciendo posible un manejo exacto de conceptos relativos y, de ahí, emanciparla de las afirmaciones rutinarias del lenguaje hablado para eliminar cualquier caldo de cultivo por parte del ‘cliché’ en la filosofía también. Esto debería preparar el camino para un lenguaje científico universal que, difiriendo ampliamente de esfuerzos lingüísticos como el de

7 En este sentido Schröeder creía que, por ejemplo, lenguajes como el esperanto están destinados al fracaso (Peckhaus, 2003).

> Volapük, luzca más como un lenguaje de signos que como un lenguaje de sonidos(Aberdein et. al, 2009, p. 172)[8].

Este lenguaje universal vendría a ser para Schröeder el álgebra formal, que es el estudio de las leyes de las operaciones algebraicas sin hacer ningún tipo de presupuesto sobre el contenido de los símbolos o su naturaleza (Jacquette, 2006). Schröeder materializó esta idea de fundamentar la lógica en el álgebra formal en sus obras *Der Operationskreis des Logikkalkuls* (1877) y *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (1890) —esta última de tres volúmenes—, dando así pie a la creación de la lógica formal o simbólica, que más adelante serviría para desarrollos en lógica, matemática y filosofía, particularmente por parte de Frege y Russell.

8 La traducción es propia.

2. Lógica formal y proposicional

Resumen

En esta unidad se desarrolla el concepto de lógica desde la lógica formal. Se parte de conceptos elementales como el de argumento, silogismo, conclusión y validez para luego mostrar el paso del lenguaje proposicional al lenguaje simbólico, en donde se introducen los conectores lógicos, las tablas de verdad, la negación de proposiciones moleculares, las reglas de inferencia y el concepto de demostración. Esto pretende servir como exposición panorámica de los elementos conceptuales más importantes de la lógica proposicional formal, lo que permitirá al estudiante desarrollar las competencias suficientes para identificar una argumentación lógicamente válida, así como para proponer demostraciones lógicas de afirmaciones en lenguaje simbólico a través de exponer las fortalezas del uso de los símbolos en el razonamiento.

Palabras clave: lógica formal, validez, conectores lógicos, tablas de verdad, negación de proposiciones, demostración lógica.

2.1 Desarrollo de los contenidos

La lógica, a grandes rasgos, se ocupa de determinar la forma correcta de razonar. Pero determinar la forma correcta de hacer algo se traduce generalmente en establecer criterios con base a los cuales se emite un juicio. Para establecer estos criterios, la lógica toma en cuenta aspectos como la consistencia, la validez de la inferencia y la articulación de los argumentos; que son aspectos que se deben definir. Para iniciar, sin embargo, resulta pertinente aclarar la terminología involucrada en el proceso mismo de razonar.

En concordancia con los propósitos de esta nota de clase, nos centraremos en ver a la lógica como el estudio de la noción de validez desde una perspectiva sintáctica, es decir, a partir de las reglas de inferencia que se consideran válidas en un sistema lógico específico. A continuación, se discutirán los términos requeridos para hablar de esta noción de lógica.

En debates y discusiones con cierto nivel de formalidad frecuentemente se realizan afirmaciones y luego se dan razones que, se cree, apoyan esas afirmaciones: en este sentido se puede decir que se emplean razonamientos. En lógica, se entiende por razonamiento un encadenamiento de afirmaciones que desembocan en una conclusión. Sin embargo, uno de los objetos de estudio de la lógica, es precisamente analizar si estas afirmaciones están debidamente construidas, si están debidamente articuladas y si efectivamente la conclusión se deduce del razonamiento expuesto. De esta manera, las afirmaciones hacen parte fundamental del estudio de la lógica. ¿Pero qué es una afirmación? Por el momento diremos que una afirmación está constituida por un sujeto y un predicado, y que puede clasificarse como premisa o conclusión.

Una premisa es una afirmación que debe tenerse en cuenta a la hora de discutir sobre algún tema específico; es algo que se supone cierto, representa una creencia personal, es comúnmente aceptado o constituye un hecho evidente. Ejemplos de premisas son las siguientes afirmaciones: “Todos los hombres son mortales”, “1’000.000 de granos de arena forman un montón”, “Bogotá es la capital de Colombia”.

Una conclusión también es una afirmación, pero debe estar ligada a premisas previamente expuestas. Por ejemplo, la afirmación “estoy en Colombia” puede verse como una conclusión de tomar en cuenta las premisas: “estoy en Bogotá” y “Bogotá es la capital de Colombia”.

El proceso mediante el cual se llega a una conclusión a partir de las premisas se denomina *inferencia*, y es otro campo de estudio de la lógica; si efectivamente la conclusión se deduce de las premisas dadas, entonces diremos que el razonamiento es *válido*. Otra forma de expresar esta propiedad es diciendo que si las premisas son verdaderas es imposible que la conclusión no lo sea. Si esto no se cumple, el razonamiento será inválido.

Además de la validez de un razonamiento, también puede estudiarse su congruencia. Un razonamiento es congruente si: (1) el razonamiento es válido y (2) las premisas son verdaderas. En otras palabras, el ser válido es un requisito para que pueda verificarse la congruencia de un argumento, pero también debe haber una verificación de la veracidad de las premisas. Este último asunto se tratará más adelante. Por ahora considérese el siguiente ejemplo:

(1) Todos los unicornios tienen cuerno.

(2) Jack es un unicornio.

Por lo tanto,

(3) Jack tiene cuerno.

Aquí puede identificarse que las afirmaciones (1) y (2) son premisas, mientras que la afirmación (3) es la conclusión del razonamiento. También puede verse que si se aceptan como verdaderas tanto (1) como (2) también debe aceptarse que (3) es verdadera, por lo que el razonamiento es válido. Sin embargo no podríamos decir que es congruente, ya que, si bien hemos dicho que es válido (cumpliendo así el primer requisito para ser congruente), tiene premisas falsas porque los unicornios no existen.

Observemos ahora otro ejemplo:

(1) Todos los estudiantes de filosofía toman al menos un curso de lógica.

(2) Juan tomó un curso de lógica.

Por lo tanto,

(3) Juan es estudiante de filosofía.

Nótese que en este caso la deducción de la afirmación (3) no parece muy sólida. En efecto, el hecho de que alguien tome un curso de lógica no implica, de acuerdo con la premisa 1, que sea estudiante de filosofía. Por lo tanto, ha de decirse que la conclusión no se deduce en realidad de lo que afirman las premisas, por lo que el razonamiento no es válido.

Por otro lado, podemos encontrar premisas en las que se plantea un razonamiento que concluye con una posibilidad, pero no más que esto:

(1) La mayoría de los colombianos son católicos.

(2) La mayoría de los católicos se oponen al aborto.

Por lo tanto,

(3) Por lo menos algunos colombianos se oponen al aborto.

Inicialmente, pareciera que la conclusión es razonable. Sin embargo, desde un punto de vista estrictamente lógico, no es posible garantizar que *siempre* que (1) y (2) sean verdaderas, (3) también lo será, ya que, bajo este esquema, siempre es posible encontrar un grupo de colombianos (aquellos que no son mayoría sino minoría no-católica) que no se oponga al aborto. Debido a esto, este razonamiento no es válido.

Por último, tenemos la siguiente situación:

(1) Anteayer salió el sol.

(2) Hoy salió el sol.

Por lo tanto,

(3) Mañana saldrá el sol.

Nótese que, aunque parece posible, no es posible asegurar que el sol saldrá mañana simplemente con base en que ha salido los dos días anteriores, por lo que el razonamiento no es válido[9].

Finalmente, la lógica puede estudiar la *consistencia* de los razonamientos. Un razonamiento es consistente si la conclusión no contradice a las premisas, o en otras palabras, de premisas verdaderas no se deduzcan conclusiones contradictorias. Si surgen conclusiones contradictorias entonces se dice que el razonamiento es *inconsistente*. Un ejemplo de razonamiento inconsistente es el siguiente:

Premisa 1: una colección de un millón de granos de arena es un montón. (Hecho observable)

9 El filósofo Bertrand Russell en su obra *The Problems of Philosophy* (1912) propone un ejemplo más elocuente para este esquema de razonamiento: imaginemos un pavo al que todos los días durante un año lo han alimentado cada mañana. De esta situación, el pavo infiere que hoy, 24 de diciembre, también lo alimentarán. Contrario a esto, el granjero lo preparará para su cena navideña.

Premisa 2: si una colección de n granos de arena es un montón, entonces también lo es una colección de n-1 granos de arena. (Razonamiento evidente)

Premisa 3: existe una colección de x granos de arena que no se considera un montón. (Hecho observable)

Conclusión (de las premisas 1 y 2): cualquier colección de granos de arena forma un montón.

Contradicción entre la conclusión y la premisa 3[10].

2.2 Ejercicios

En las siguientes situaciones identifique las premisas, la conclusión y determine si el razonamiento es válido, congruente o ninguna de las dos:

1. El actual rey de Colombia es calvo. Juan es el actual rey de Colombia. Por lo tanto, es calvo.

2. La mayoría de los estudiantes de la clase de lógica son hombres. A la mayoría de hombres les gusta el fútbol. Por lo tanto, a algunos estudiantes de la clase de lógica les gusta el fútbol.

3. Algunos de los estudiantes de la clase de lógica estudian teología. Por tanto, la lógica es necesaria para entender la teología.

4. Juan Manuel Santos fue el presidente electo de Colombia en el 2014, ya que si alguien gana las elecciones presidenciales se convierte en presidente, y Juan Manuel Santos ganó las elecciones presidenciales de 2014.

---

10 Este razonamiento es una de las formas de presentar la famosa *paradoja de sorites* de la que se hablará más adelante.

5. Juan se robó el pastel, ya que en ese momento en la casa sólo estaban él y María, pero María estaba tomando una ducha.

6. Si llueve entonces las calles se mojan. Las calles no están mojadas. Luego, no llovió.

7. Siempre que saco la sombrilla no llueve. Hoy no saqué la sombrilla. Por lo tanto, llovió.

8. Eventualmente moriré algún día, ya que todos los seres humanos son mortales y yo soy un ser humano.

9. No existen los políticos honestos, ya que, si existieran, yo los conocería.

10. No existe vida inteligente en otros planetas, pues si existiera, ya nos habría contactado de alguna forma.

3. El concepto de proposición

Hasta el momento se han estudiado razonamientos que utilizan lo que hemos sabido denominar *afirmaciones*, que, como se mencionó anteriormente, consisten en oraciones con sujeto y predicado. Sin embargo, es hora de especificar el rango de alcance de estos elementos. Para esto, introduciremos una primera aclaración, y es el concepto de proposición.

Llamaremos *proposición* a una afirmación que sea susceptible de ser clasificada como verdadera o falsa. Así, por ejemplo, la afirmación: "La Tierra es el tercer planeta más cercano al Sol" es una proposición, ya que con instrumentos de observación puede comprobarse que esta afirmación es de hecho verdadera. Por otro lado, la afirmación; "El agua está compuesta por tres átomos de hidrógeno y uno de oxígeno" es también una proposición porque, a pesar de ser falsa (en realidad se compone de sólo dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno), precisamente el hecho de que pueda decirse de ella que *es falsa* la hace ya una proposición.

Sin embargo, es preciso aclarar que no toda oración es una proposición. Existen oraciones exclamativas como "¡Esto es un improperio!", o interrogativas: "¿Vienes o te quedas?". Estas oraciones **no** son proposiciones, ya que no podrían clasificarse como verdaderas o falsas porque no expresan una afirmación acerca de algo —que sea susceptible de comprobación—, sino una emoción o inquietud, que se enuncian con otros propósitos —por ejemplo, generar indignación o requerir una respuesta.

A esta altura puede entonces surgir la pregunta: ¿por qué la lógica se restringe únicamente a aquellas afirmaciones que tengan la forma de proposiciones? Importantes lógicos como Gottlob Frege (1848-1925) sostienen que esto es así pues, tal como se han definido, las proposiciones son las únicas oraciones que refieren a hechos y, por tanto, pueden ser verdaderas o falsas. Ahora, dado que pueden ser verdaderas o falsas, no sólo garantizan la validez de los argumentos sino también la verdad de la conclusión. Lo cual nos permite llegar a la verdad con respecto a un determinado objeto de conocimiento. Por ahora nos centraremos en el estudio de las proposiciones en cuanto unidades de significado, en el que no se tiene en cuenta su estructura interna (distinción entre sujeto y predicado y uso de cuantificadores). A esta área de la lógica que se ocupa de proposiciones es a la que se le llama *lógica proposicional*.

3.1 Proposiciones simples y compuestas

Las proposiciones, como unidad de significado, tomadas como un todo, se conectan con otras y forman una estructura. Así por ejemplo, la proposición "fui a la tienda y al banco" puede verse como la unión de dos proposiciones: "fui a la tienda" y "fui al banco". El elemento que une las dos proposiciones anteriores se denomina conector lógico o proposicional, que en este caso es la conjunción "y". Otro conector lógico es "o", con el cual pueden formarse proposiciones como "hoy he comido arroz o papa". Pero antes de entrar en detalle en cada conector, se definirán los conceptos de proposición atómica y molecular.

Como se mostró en el párrafo anterior, hay proposiciones que se pueden dividir en dos o más proposiciones más simples. A proposiciones con este atributo (que se puedan dividir en dos o más proposiciones más simples) las llamaremos *proposiciones compuestas o moleculares*. Mientras que aquellas proposiciones que no puedan dividirse en dos o más proposiciones más simples las llamaremos *proposiciones simples o atómicas*. Obsérvese que cualquier proposición compuesta puede descomponerse en proposiciones simples identificando los conectores involucrados en la proposición inicial y, a partir de estos, separar adecuadamente las proposiciones simples. De forma contraria, al partir de proposiciones simples y añadir conectores lógicos se pueden formar proposiciones compuestas.

Ejemplos:

1. La proposición "Juan está jugando fútbol" es una proposición simple, ya que no es posible descomponerla en dos o más proposiciones.
2. La proposición: "Almorzaré en casa o afuera" es una proposición compuesta, ya que puede descomponerse en dos proposiciones simples: "Almorzaré en casa" y "Almorzaré afuera".
3. La proposición: "Si llueve sacaré la sombrilla" es una proposición compuesta, ya que puede descomponerse en dos proposiciones simples: "Llueve" y "Sacaré la sombrilla".
4. La proposición: "Si voy al centro y estás conmigo entonces iremos a cine o a comer helado" es una proposición compuesta, ya que puede descomponerse en cuatro proposiciones simples: "Voy al centro", "Estás conmigo", "Iremos a cine" e "Iremos a comer helado".

3.1.1 Conectores lógicos

Como se mencionó anteriormente, los conectores lógicos o proposicionales sirven para unir dos proposiciones para formar una proposición compuesta[11]. La idea de la utilización de los conectores es

---

11 De forma más rigurosa se habla de conectores binarios cuando unen dos proposiciones (como es el caso de la disyunción, la conjunción y la implicación) o de conectores unitarios para el caso de la negación. Por simplicidad solo se hablará de conectores binarios y se tomará a la negación como caso especial.

esquematizar la forma en que se verbalizan los razonamientos. El supuesto detrás de esto es que la forma en que los seres humanos concatenamos nuestras ideas puede resumirse en cuatro formas básicas: la disyunción, la conjunción, la implicación y la negación.

Los conectores que se utilizan en lógica proposicional se describen entonces en esos mismos términos:

> **Disyunción**. La disyunción se utiliza para conectar dos ideas cuando se quiere decir que puede ser el caso de “a” o de “b”. Esta articulación puede hacerse de forma inclusiva (puede ser “a” o “b”, al menos uno de los dos) o de forma exclusiva (necesariamente “a” o “b”, sólo uno de los dos). Un ejemplo del primer caso (disyunción inclusiva) sería: “Juan está en el parque o está jugando fútbol”. Aquí podemos observar que puede ser el caso que Juan esté en el parque, o que Juan esté jugando fútbol, o que Juan esté en el parque jugando fútbol; cualquiera de estos tres casos es posible cuando se utiliza una disyunción inclusiva para expresar una proposición. Por otro lado, un ejemplo de una disyunción exclusiva sería el siguiente: “Juan está en la casa o está en el parque”. En esta situación puede ser el caso que Juan esté en la casa o que esté en el parque, pero no es posible que Juan esté en la casa y al mismo tiempo en el parque; de esta manera, la disyunción exclusiva se utiliza cuando se quiere expresar la situación de dos opciones mutuamente excluyentes. Para diferenciarla de la disyunción inclusiva, escribiremos la proposición iniciando con una “o” cuando queramos expresar a la disyunción exclusiva. De este modo, nuestro ejemplo con esta nueva escritura quedaría de la siguiente manera: “O Juan está en la casa o está en el parque”.

Conjunción. En la conjunción, la conexión entre las dos proposiciones es de naturaleza *simultánea*: se quiere expresar que es el caso de "a" pero también de "b". Así, por ejemplo, cuando decimos "Juan está en el parque y está jugando fútbol", quiere expresarse la idea de que ambas situaciones suceden simultáneamente: Juan está en el parque *y además* está jugando fútbol. Obsérvese que, a diferencia de la disyunción inclusiva, que suceda uno de los casos no es suficiente para que se cumpla con la conjunción —pero sí sería suficiente para que se cumpla con la disyunción inclusiva—; la conjunción obliga a que ambas situaciones deban suceder necesariamente de forma simultánea.

Implicación o condicional. La implicación busca representar ideas que se expresan a manera de un condicional con estructura de antecedente-consecuente. Un rasgo característico de la implicación es que se expresa usualmente mediante la forma "si... entonces...", porque desea manifestar la relación condicional que existe entre dos sucesos. Al suceso que se considera condición se le llama *antecedente*, mientras aquello que sucede cuando se cumple el antecedente se denomina *consecuente*. Los siguientes son ejemplos de implicaciones: "si llueve entonces las calles se mojan", "si estudio entonces aprobaré el examen", "si me levanto temprano alcanzaré a ir al gimnasio". En el primer ejemplo el antecedente es "llueve" y el consecuente, "las calles se mojan"; en el segundo, el antecedente es "estudio" y el consecuente, "aprobaré el examen"; en el tercer caso, el antecedente es "me levanto temprano", y el consecuente, "alcanzaré a ir al gimnasio".

Negación. La negación se utiliza para negar lo afirmado por la proposición original. Así, por ejemplo, si la proposición original es: "Juan está en el parque", su negación podría es-

> cribirse como: "No es cierto que Juan está en el parque" o también podría escribirse como "Juan no está en el parque". En cualquier caso, por razones de simplicidad, solo se considerarán como proposiciones simples aquellas que estén en forma afirmativa. Así, por ejemplo, "Juan está en el parque" sería una proposición simple mientras que "Juan no está en el parque" sería una proposición compuesta, ya que está conformada por una proposición simple ("Juan está en el parque") y un conector (la negación).

A pesar de esta esquematización del lenguaje utilizado para describir las proposiciones, a medida que las afirmaciones se van complejizando (en términos de proposiciones compuestas) pueden ocurrir situaciones que dificultan la interpretación de una proposición, así como la identificación de la estructura de la misma. Por ejemplo, obsérvese la siguiente proposición: "Si Juan o Pedro llegan a la presidencia, entonces los índices de corrupción van a disminuir y habrá una mayor equidad en el país". ¿Cómo puede interpretarse la estructura de esta proposición? Una posible interpretación es que el primer conector es una disyunción inclusiva, lo que implica que puede darse el caso que Juan y Pedro lleguen a la presidencia al mismo tiempo. Por otro lado, si se cumple que Juan o Pedro llegan a la presidencia, no es claro si esto implica, al mismo tiempo, que los índices de corrupción van a disminuir, y que además "habrá una mayor equidad en el país", o si solamente implica lo primero.

Esta diversidad de interpretaciones se debe a que las proposiciones trabajadas hasta el momento se han expresado en lenguaje natural, y el lenguaje natural tiene, de forma inherente, atributos indeseables para expresar afirmaciones de orden objetivo, tales como la vaguedad y la ambigüedad (Russell, 1923). De hecho, numerosos filósofos del lenguaje contemporáneos estudian el problema de la vaguedad en el lenguaje, ya que supone un obstáculo no sólo de orden semántico sino de orden epistemológico (Keefe, 2007; Sorensen, 2001; Williamson, 1994)

Con el objeto de esquivar, de alguna manera, estos atributos indeseables del lenguaje natural, se estudiará a continuación la propuesta de simbolizar a la lógica proposicional. Esto bajo la premisa de que si se fabrican unos símbolos sobre los cuales se define una significación unívoca, entonces estas expresiones no estarán permeadas por las influencias del contexto socio-cultural de una comunidad de hablantes y por tanto, se cree, tendrá las suficientes herramientas para evitar al máximo las interpretaciones vagas y ambiguas (Sorensen, 2001). En palabras del filósofo Bertrand Russell: "Estudiando los principios del simbolismo podemos aprender a no ser inconscientemente influenciados por el lenguaje y, de esta forma, escapar de una serie de nociones erróneas" (Russell, 1923, p. 84).

3.2 La sintaxis PL y la simbolización

Con el ánimo de evitar la ambigüedad y vaguedad propias del lenguaje, se estudiará a continuación un procedimiento para simbolizar la estructura conceptual desarrollada hasta el momento; en particular se estudiará la forma de simbolizar las proposiciones y sus conectores.

Para esto, se creará una especie de *lenguaje artificial*, en donde se tendrán que definir asuntos como el alfabeto y las reglas sintácticas a utilizar. A este lenguaje artificial lo llamaremos 'PL' (que son las iniciales de lógica proposicional en inglés).

El alfabeto. De la lingüística usual sabemos que un alfabeto consta de las unidades semánticas más elementales que existen. Son irreductibles, por lo que no pueden descomponerse en otras unidades más fundamentales —son atómicas si se quiere—. Para nuestro caso, nos interesará construir un alfabeto que nos proporcione los elementos necesarios para hablar de la *estructura* lógica de una proposición. Con este objetivo en mente, necesitaremos entonces un alfabeto que nos permita simbolizar a las proposiciones y a sus conectores. La propuesta usual es la siguiente (Smith, 2003):

Alfabeto de PL

- Símbolos para las proposiciones: *p, q, r, s, t*, ..., etc. (i.e., letras del alfabeto español usual a partir de la letra ‘p’). A estos símbolos los llamaremos simplemente ‘proposiciones’.
- Paréntesis: (,).
- Símbolos para conectores: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$. (Negación, conjunción, disyunción e implicación respectivamente)[12].

Este alfabeto propone unos elementos para evidenciar la estructura lógica de una proposición a partir de simbolización. Sin embargo, debe existir un grupo de reglas que establezca, de forma única, el uso correcto de estos símbolos. Esto servirá para diferenciar las expresiones que tienen sentido de las que no —establecer las denominadas *fórmulas bien formadas*—. A este grupo se le denomina “reglas sintácticas”:

Reglas sintácticas de PL

12 En el presente texto se tratarán, por razones pedagógicas y de economía conceptual, solamente cuatro conectores. Frecuentemente se encuentran en otras fuentes otros símbolos como el de la disyunción exclusiva () y el bicondicional (). Pero, como se mostrará más adelante, estos otros conectores se pueden reducir a los cuatro conectores expuestos aquí.

- Existen dos tipos de conectores: binarios y unitarios. Los binarios son $\wedge$, $\vee$ y $\longrightarrow$, y se escriben siempre en medio de dos proposiciones, cualquiera de las cuales puede tener un conector unitario. Sólo hay un conector unitario: $\neg$, y se escribe siempre antes de una proposición.
- Toda enunciación debe involucrar al menos una proposición. Si se escriben dos proposiciones, debe especificarse un conector que las relacione. Si se escriben más de dos proposiciones, debe especificarse, mediante paréntesis, la prelación de los conectores.

Axiomas. Los axiomas serían algo así como los principios fundamentales de los cuales se parte para que el sistema funcione adecuadamente. Sintácticamente son fórmulas que siempre se asumen como verdaderas dentro del sistema. A estas fórmulas se les llama *principios de la lógica proposicional clásica*. Estas son:

- Principio de no-contradicción: $\neg(p \wedge \neg p)$
- Principio del tercero excluido: $p \vee \neg p$.
- Principio de identidad: $p \leftrightarrow p$.

Ya con el alfabeto y las reglas claras, es posible empezar a estudiar cómo sería este proceso de simbolización de proposiciones. Examinemos algunos ejemplos preliminares.

Ejemplo 1

Supongamos la proposición “María fue a la tienda y al banco”.

Esta proposición puede simbolizarse de la siguiente manera usando la sintaxis PL:

Sea p la simbolización de la proposición “María fue a la tienda”, y q la simbolización de la proposición “María fue al banco”. Como la proposición original contiene una disyunción, la simbolización completa quedaría así:

$$p \wedge q$$

Ejemplo 2

Supongamos la proposición “Si llueve en la tarde entonces me mojaré”. Esta proposición tiene una estructura de condicional, por lo que la simbolización se hace de la siguiente manera:

Sea p la proposición “Llueve en la tarde”, y sea q la proposición “Me mojaré”. La simbolización completa es entonces:

$$p \longrightarrow q$$

Ejemplo 3

Supongamos la proposición: “Me gusta el ajedrez, pero no soy bueno en ello”. Esta proposición es, aparentemente, un poco más complicada que las anteriormente trabajadas. Sin embargo, todo se reduce a identificar qué tipo de estructura lógica tiene la proposición. Es decir, tenemos que dar respuesta a la pregunta: ¿Si tuviéramos que expresar esa afirmación en términos de los conectores que tenemos (negación, disyunción, conjunción, implicación), sin cambiarle el sentido a la frase, qué estructura utilizaríamos? La respuesta, en este caso, es la conjunción y la negación:

p: Me gusta el ajedrez.

q: Soy bueno en el ajedrez.

La simbolización completa queda: $p \wedge \neg q$.

Otra ventaja de la simbolización es la posibilidad de hacer generalizaciones. Cuando se utilizan símbolos, es posible estudiar algo en términos de las relaciones que permanecen invariantes en el lenguaje y así facilitar la evaluación de los argumentos en términos de su validez. Adicionalmente, dado que la lógica expresa las leyes del pensamiento (Boole, 1854), hallaremos a su vez las propiedades estructurales del pensamiento.

Al seguir este camino podríamos preguntarnos, por ejemplo, ¿qué quiere decir $p \wedge q$? A partir de esta pregunta podemos observar que, si no se le da un contenido específico a p y a q, entonces la expresión $p \wedge q$ representa a todas las proposiciones relacionadas mediante la conjunción. Esto quiere decir que cualquier resultado que encontremos acerca de será aplicable a cualquier par de proposiciones que estén relacionadas mediante la conjunción. Un razonamiento similar podría aplicarse a las expresiones $p \vee q$, $p \longrightarrow q$, etc., advirtiendo que, si se encuentran las propiedades de estas relaciones, se encontrarán las propiedades del pensamiento. A este paso de abstracción, en donde la simbolización nos permite desligarnos del contenido de los símbolos e identificar las propiedades estructurales de la teoría, también se le conoce como *formalización*.

Ahora, si a los símbolos se les quita el contenido, ¿cómo definir a los conectores? ¿Qué quieren decir (en términos estrictamente simbólicos) las expresiones $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$? Si nos restringimos únicamente al alfabeto y las reglas sintácticas de PL, pareciera que sólo nos quedáramos con un juego de letras en donde hay símbolos tipo letra que pueden concatenarse con otros mediante los símbolos de los conectores, pero esto no pasaría de ser un simple ejercicio de combinación y permutación de símbolos sin sentido. Si se quiere en realidad establecer las propiedades estructurales del pensamiento debe capturarse la verdadera función que cumplen los conectores ya que, como se dijo anteriormente, la idea central detrás de la fuerza de la formalización es lograr capturar las relaciones entre los objetos independientemente de los objetos como tal, y son los conectores precisamente los que simbolizan estas relaciones.

¿Cómo darle entonces significado a los símbolos de los conectores? Una posible respuesta está en lo que se ha dado en llamar *valores de verdad*. Para entender cómo este concepto ayudará a darle significado a los símbolos de los conectores es necesario retroceder, durante unos momentos, en nuestro proceso de abstracción y volver temporalmente a las proposiciones expresadas en lenguaje natural para establecer cuál es la propiedad invariante de, por ejemplo, la conjunción. Empecemos con algunos casos particulares. En el caso de la conjunción, cuando decíamos proposiciones como: "María fue a la tienda y al banco", queríamos decir que en este caso María fue tanto a la tienda como al banco. En otras palabras, la conjunción nos está diciendo que se cumple que María fue a la tienda, pero *también* fue al banco.

Miremos otro ejemplo. Si alguien dice: "Juan está haciendo la tarea y María está leyendo un libro", está diciendo que es el caso que Juan está haciendo la tarea y también que María está leyendo un libro. Es decir, no puede ocurrir que Juan esté haciendo la tarea y María esté, por ejemplo, viendo televisión. Si este es el caso, entonces cualquier persona podría decirle a quien enunció la proposición que ha dicho una falsedad, independientemente de si se cumple la primera parte de la proposición; deben ser ciertas ambas partes para que la conjunción *cumpla su función*.

De los dos casos anteriores podemos inferir entonces que la función de la conjunción es expresar que las proposiciones que conecta se cumplen, son ciertas o, usando la terminología lógica, son *verdaderas*. En términos de símbolos: $p \wedge q$ es verdadera si, y solo si, tanto *p* como *q* son verdaderas.

Procederemos ahora de una forma similar para darle significado al símbolo de la disyunción: ∨. Si alguien dice: "Juan está en la casa o está en el parque", lo que quiere decir es que puede ser el caso que Juan está en la casa, pero también puede ser el caso que esté en el parque. Es decir, cualquiera de las dos partes de la proposición puede cumplirse independientemente de la otra, pero lo que no puede ocurrir es que no se cumpla ninguna. Si alguien encuentra a Juan en la casa, entonces juzgará que la proposición se cumple. Igualmente la juzgará cierta si encuentra a Juan en el parque. Sin embargo, si no lo encuentra ni en la casa ni en el parque, entonces juzgará la proposición como *falsa*.

La conclusión en este caso es que, para que la disyunción se juzgue como cierta, alguna de las afirmaciones que la componen debe ser cierta. Esto puede expresarse en términos simbólicos de la siguiente manera: $p \vee q$ es verdadera si, y solo si, al menos una de las dos proposiciones es verdadera.

Para el caso del símbolo condicional '⟶' procederemos de forma ligeramente distinta; no examinaremos los casos en los que se considera verdadera una proposición condicional (ya que pueden ser muchos), sino que, por el contrario, encontraremos que será más efectiva la tarea si examinamos en qué casos el condicional resulta ser falso —que es, como se verá, solo uno—. Esto acortará mucho el camino, ya que, identificando el caso en que no se cumple podremos deducir los casos en que sí. Usemos el siguiente ejemplo: supongamos que un profesor de física está enseñando la caída libre a sus estudiantes y hace la siguiente afirmación: "si suelto el marcador, este caerá al piso". ¿Qué tendría que ocurrir para que se no se cumpliera lo afirmado por lo profesor? Tendría que ocurrir que el profesor soltara el marcador y, por alguna extraña razón, el marcador no cayera al suelo. Esto refleja en realidad el verdadero sentido de una afirmación condicional; en un condicional se está afirmando la relación de dependencia de ocurrencia de dos sucesos. Cuando alguien dice "si *x* entonces *y*" es lo mismo que si dijera "para que ocurra *y* debe ocurrir *x*", o "para que ocurra *y* es *necesario* que ocurra *x*". El antecedente *x* es la condición que se debe cumplir para que ocurra el consecuente *y*. Si se cumple *x* y aun así no se cumple *y*, se está mostrando que en realidad *x* no es una condición para que ocurra *y*, y *y* puede ocurrir independientemente de *x*. Esto contradice por completo lo que se afirma en el condicional, y constituye, por supuesto, la propiedad invariante que se buscaba del símbolo condicional: $p \longrightarrow q$ es verdadera en todos los casos excepto cuando *p* es verdadero y *q* no lo es.

En este momento ya se está entonces en condiciones de esquematizar las conclusiones de los hallazgos frente al significado de las expresiones ¬, ∧, ∨, ⟶ a partir de los llamados 'valores de verdad' utilizando un recurso esquemático llamado 'tablas de verdad'.

3.3 Tablas de verdad

Se ha visto que de una proposición puede decirse que es o no el caso. Además, se ha encontrado útil expresar esto utilizando una valoración en términos de *verdadero* (V) —cuando es el caso, cuando se cumple lo afirmado— o *falso* (F) —cuando no es el caso, cuando no se cumple lo afirmado—. Usando esta terminología, es posible representar de forma tabular las conclusiones a las que se llegaron en los párrafos anteriores. A estas representaciones tabulares se les llama *tablas de verdad*.

Usando las tablas de verdad podemos expresar la propiedad fundamental de la conjunción:

Tabla 1. Tabla de verdad de la conjunción

p	q	$p \land q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La tabla general de la conjunción (tabla 1) tiene como función mostrar el comportamiento de la conjunción (última columna) ante todas las posibles combinaciones de valores de verdad de sus proposiciones constituyentes (primeras dos columnas). La tabla ilustra la conclusión a la que se había llegado anteriormente: la conjunción será verdadera únicamente cuando sus proposiciones constituyentes sean, simultáneamente, verdaderas (que es el caso mostrado en la primera fila de valores de verdad) y será falsa en cualquier otro caso.

Siguiendo el mismo razonamiento, la tabla de verdad de la disyunción quedaría de la siguiente manera:

Tabla 2. Tabla de verdad de la disyunción

p	q	$p \lor q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La tabla de verdad de la disyunción expresa el hecho de que basta con que al menos una de las proposiciones constituyentes sea verdadera para que la disyunción de las proposiciones sea verdadera (ver primeras tres filas de los valores de verdad). No obstante, si ambas proposiciones son falsas, su disyunción también lo será (como lo ilustra la última fila de la tabla).

En el caso del condicional la situación es la siguiente:

Tabla 3. Tabla de verdad del condicional

p	q	$p \longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La tabla 3 ilustra la propiedad fundamental del condicional: es falso cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. Es verdadero en cualquier otro caso.

El ejercicio representativo de las tablas de verdad muestra otro aspecto importante de esta teoría, y es que las proposiciones compuestas son *veritativo-funcionales*. Es decir, el valor de verdad de la proposición compuesta depende del valor de verdad de las proposiciones atómicas que la componen. Teniendo en cuenta este principio, de una proposición compuesta no puede decirse, estrictamente hablando, que sea verdadera o falsa, ya que siempre dependerá de cuál sea el valor de verdad de las proposiciones involucradas. Pese a esto, sí existen otras categorías bajo las cuales se pueden clasificar a las proposiciones compuestas: la tautología, la contradicción y la contingencia.

3.4 Tautologías, contingencias y contradicciones

Se ha visto cómo los valores de verdad de una proposición compuesta fluctúan dependiendo de los valores de las proposiciones atómicas que la componen. Sin embargo, puede darse el caso de que, bajo todas las combinaciones de valores de verdad de las proposiciones simples, la proposición compuesta sea siempre verdadera, o siempre falsa. En el primer caso la llamamos *tautología*; en el segundo, *contradicción*. Si la proposición compuesta no es ni tautología ni contradicción —es decir, tiene tanto valores verdaderos como falsos—, la llamamos *contingencia*. La pregunta que se sigue de esto es, por supuesto, ¿cómo determinar si una proposición compuesta es una tautología, una contradicción o una contingencia? Existe un procedimiento bastante sistemático que permite determinarlo y que se describe a continuación:

1. Determinar el número de proposiciones atómicas que componen a la proposición compuesta. Llamemos a ese número 'n'.

2. Se debe calcular el número de filas de la tabla. Esto se puede hacer mediante la fórmula $F = 2^{n}$, donde F es el número de filas que debe tener la tabla y n es el número de proposiciones atómicas hallado en el paso 1.

3. Se debe establecer la distribución de valores de verdad de la primera columna. Esta distribución se puede hallar mediante la fórmula $v = {}^{F}/_{2}$, donde *v* es el número de valores de verdad verdaderos y falsos que deben ir en la primera columna, y F es el número de filas de la tabla que se calculó en el paso 2.

4. El resto de valores de verdad de las demás columnas de proposiciones simples se obtiene dividiendo sucesivamente al número *v* entre 2.

5. Los valores de verdad de las proposiciones compuestas de la tabla se obtienen aplicando las tablas de verdad expuestas en la sección anterior.

Ejemplo 1

Determinar si la proposición compuesta $p \longrightarrow (p \vee q)$ es una tautología, una contradicción o una contingencia.

Solución: la solución se escribirá siguiendo los cinco pasos descritos anteriormente.

Paso 1: $\mathrm{n} = 2$, ya que la proposición compuesta $p \longrightarrow (p \vee q)$ solo involucra dos proposiciones simples: p y q.

Paso 2: se aplica la fórmula para calcular el número de filas: $F = 2^{\mathrm{n}}$. Dado que n tiene el valor de 2, la fórmula da: $F = 2^2 = 4$.

Paso 3: Se aplica la fórmula para hallar el número de verdaderos (y falsos) de la primera columna: $v = {}^{F}/_{2} = {}^{4}/_{2} = 2$. Por lo que la primera columna tendrá 2 valores verdaderos y 2 falsos.

Paso 4: Para la otra proposición atómica, el número de verdaderos (y falsos) es: v' = ${}^{V}/_{2} = {}^{2}/_{2} = 1$. Esto quiere decir que la segunda columna debe intercalar 1 verdadero con 1 falso.

Paso 5: Se obtienen los valores de verdad de la última columna aplicando la regla de la tabla de la implicación a las columnas 1 y 3.

Con esta información ya se puede construir la tabla. Debe tenerse en cuenta que al elaborar una tabla de verdad se parte de las proposiciones simples, después se escriben las combinaciones de estas que están involucradas en la proposición compuesta, y luego se van agregando a estas últimas las demás proposiciones simples hasta llegar a la proposición compuesta que se quiere examinar:

Tabla 4. Tabla de verdad de la proposición $p \rightarrow (p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$
V	V	V	V

V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

Los valores de verdad de la columna 3 se obtuvieron de aplicar la tabla de verdad de la disyunción a los valores de las columnas 1 y 2, mientras que los valores de verdad de la columna 4 se obtuvieron a partir de la aplicación de la tabla de verdad del condicional a las columnas 1 y 3.

Como puede observarse, todos los valores de la última columna son verdaderos (V). Esto quiere decir que la proposición $p \rightarrow (p \vee q)$ es una tautología.

Ejemplo 2: determinar si la proposición compuesta $p \wedge (p \vee r)$ es una tautología, una contradicción o una contingencia.

Solución: la solución se escribirá siguiendo los cinco pasos descritos anteriormente.

Paso 1: $\mathrm{n} = 3$, ya que la proposición compuesta $p \wedge (p \vee r)$ involucra tres proposiciones simples: *p*, *q* y *r*.

Paso 2: se aplica la fórmula para calcular el número de filas: $F = 2^{\mathrm{n}}$. Dado que n tiene el valor de 3, la fórmula da: $F = 2^3 = 8$.

Paso 3: se aplica la fórmula para hallar el número de verdaderos (y falsos) de la primera columna: $v = {}^{F}/_{2} = {}^{8}/_{2} = 4$. Por lo que la primera columna tendrá 4 valores verdaderos y 4 falsos.

Paso 4: para la otra proposición atómica, el número de verdaderos (y falsos) es: v’ = ${}^{v}/_{2} = {}^{4}/_{2} = 2$. Esto quiere decir que la segunda columna debe intercalar 2 verdaderos con 2 falsos.

Paso 5: Se obtienen los valores de verdad de la última columna aplicando la regla de la tabla de la conjunción a las columnas 1 y 4.

Con esta información ya puede construirse la tabla. Debe tenerse en cuenta que al elaborar una tabla de verdad se parte de las proposiciones simples, luego se escriben las combinaciones de estas que están involucradas en la proposición compuesta, y finalmente se van agregando a estas últimas las demás proposiciones simples hasta llegar a la proposición compuesta que se quiere examinar:

Tabla 5. Tabla de verdad de la proposición $p \wedge (q \vee r)$

p	q	r	$p \vee q$	$p \wedge (q \vee r)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	F	F

Como puede observarse, en la última columna de la tabla de verdad encontramos valores tanto verdaderos como falsos, por lo que la proposición $p \wedge (q \vee r)$ es una contingencia.

3.5 Aplicación 1. El problema del condicional: condicional indicativo y material

Recuérdese que el objetivo de introducir los conectores en lógica es esquematizar la manera en que razonamos los seres humanos. Uno de los esquemas más utilizados para razonar en áreas como la filosofía o la ciencia es el condicional; en ciencias es de interés poner a prueba hipótesis que frecuentemente se encuentran a manera de condicional: "si la sustancia X se encuentra a una temperatura superior a los 100ºC, entonces pasará a un estado gaseoso". En filosofía, en ocasiones se encuentran razonamientos de tipo hipotético-deductivo que también se expresan mediante un condicional: "si esto es así, entonces...". Es por eso que el esquema de razonamiento del condicional es uno de los más importantes en diversas áreas del conocimiento. En esta sección se intentó recoger este esquema mediante el símbolo '$\longrightarrow$' que se definió como "$p \longrightarrow q$ es verdadera en todos los casos excepto cuando p es verdadero y q no lo es". ¿Pero hasta qué punto esta definición recoge toda la carga semántica del condicional que se expresa en lenguaje natural? A continuación, se expondrán algunas situaciones que nos permitirán darnos una idea más clara de la respuesta a esta pregunta.

Obsérvese el siguiente caso:

p: "3 es un número impar".

q: "Hitler murió en 1945".

Debido a que —hasta donde se sabe— tanto p como q son ambos verdaderos, $p \longrightarrow q$ es verdadero (Cf. Tabla de verdad del condicional, primera fila). Esto, volviendo al lenguaje natural, quiere decir que la proposición "Si 3 es un número impar, entonces Hitler murió en 1945" es verdadera. Lo anterior es problemático porque sugiere una relación condicional (verdadera) sobre dos hechos que no guardan ninguna relación entre sí: no se le puede atribuir a la imparidad del número 3 la muerte de Hitler en 1945.

Otra situación problemática se puede derivar del hecho de que, si se tiene una proposición verdadera, cualquier proposición (sea verdadera o falsa) la puede anteceder. Tómese por ejemplo el siguiente caso:

p: “Mi gato está vivo”.

q: “Hitler murió en 1945”.

Si suponemos que mi gato está vivo, entonces caeremos nuevamente en el caso anterior y la proposición “Si mi gato está vivo, entonces Hitler murió en 1945”. Pero también es verdadera la proposición “Si mi gato está muerto, entonces Hitler murió en 1945”.

Si partimos ahora de un antecedente falso, observaremos que cualquier cosa podrá deducirse. Veamos el siguiente ejemplo:

p: “2 es un número impar”.

q: “Yo soy el rey de Colombia”.

Dado que tanto p como q son falsas, la proposición: “Si 2 es un número impar, entonces yo soy el presidente de Colombia” es verdadera (Cf. Con la tabla de verdad del condicional, última fila).

Estas situaciones, en apariencia paradójicas, resultan del atributo veritativo-funcional del condicional, es decir, el hecho de que el condicional sea verdadero con base en los valores de verdad tanto del antecedente como del consecuente. Nótese que este criterio no especifica nada en cuanto a la relación que deba existir entre el antecedente y el consecuente para que el condicional sea verdadero. Es por eso que podemos afirmar que el condicional es verdadero o no en términos de los valores de verdad y no en la existencia o no de una condición. Esto muestra que, lamentablemente, el condicional definido en esta sección no logra atrapar adecuadamente la riqueza semántica del condicional usado en el lenguaje natural —que siempre supone una relación condicional—. Se hace por eso necesario diferenciar entre el condicional usual o habitual —aquel que se usa en lenguaje natural— y el *condicional material* —el usado en lógica y definido en esta sección— que, si bien no captura todas las prerrogativas del condicional usual, aporta elementos conceptuales importantes que permiten avanzar en el análisis de los razonamientos lógicos[13].

Otra problemática que puede surgir con los condicionales —por su estructura misma— son las relaciones especulativas. Este tipo de relaciones involucran pensar sobre la forma en que se hubieran desarrollado los hechos si algo (que consideramos la condición necesaria) no hubiera ocurrido. Es muy común escuchar a la gente hacerse preguntas como: "¿Qué hubiera ocurrido si no hubieran asesinado a Luis Carlos Galán?" o "¿qué hubiera ocurrido si no se hubiera realizado el Acuerdo de Paz con las FARC?". Hay incluso quienes responden a la primera pregunta con afirmaciones como la siguiente: "Si a Luis Carlos Galán no lo hubieran asesinado, hubiera sido elegido presidente de Colombia en 1990", o hay quienes optan por una postura fatalista: "si a Luis Carlos Galán no lo hubieran asesinado en Soacha, probablemente lo hubieran asesinado en otra ocasión". Esta manera especulativa de plantear un condicional utiliza el *modo subjuntivo*. El modo subjuntivo se utiliza para hablar de escenarios posibles distintos a los que de hecho ocurrieron. Son situaciones irreales que no sobrepasan el reino de la especulación. En este sentido, cuando hablamos de condicionales en modo subjuntivo, se entra a un campo de estudio en filosofía contemporánea del lenguaje llamado los contrafácticos. Los contrafácticos (*counterfactuals* en inglés) se utilizan, precisamente, para estudiar esas formas subjuntivas del condicional; cuál es su estructura, cuáles son sus propiedades, cómo serían sus valores de verdad, etc. Por esta razón, será necesario distinguir entre los condicionales subjuntivos (aquellos que afirman condicionales en realidades alternas) y los condicionales indicativos (aquellos que

13 Para mayor información sobre este tema ver por ejemplo Edgington (2014).

se refieren a hechos fácticos únicamente). Los primeros han sido estudiados por parte de autores como David Lewis (2001), Robert Stalnaker (1975) e Igor Douven (2015).

Ejercicios

A. Identifique cuáles de las siguientes oraciones son proposiciones (según la definición dada en esta sección):

- ¿Juan está en la casa?
- María es una gran solista.
- ¡Cállate!
- Mmm... quién sabe.
- ¡Ay!
- Rojo.
- Mi carro es rojo.

B. Utilice la sintaxis PL para simbolizar las siguientes proposiciones dadas en lenguaje natural:

1. Juan quiere ir al cine y María quiere ir a comer o a bailar.
2. Si estudio me irá bien en el examen.
3. No quiero ir al médico ni al odontólogo.
4. Me caso con él si me lleva a París.
5. Si estudio y me esfuerzo, entonces aprobaré la asignatura de lógica y no tendré que repetir la materia.
6. Si no lo vuelve a hacer, lo perdono.
7. No creo que sea cierto, pero es posible.

C. Suponga las siguientes simbolizaciones:

p: María quiere estudiar Hermenéutica.

q: María debe leer a Gadamer.

r: Juan admira a Foucault.

s: A Pedro le interesa Frege.

Redactar las proposiciones que se muestran a continuación en lenguaje natural usando las simbolizaciones presentadas anteriormente.

1. $p \vee r$
2. $\neg p \vee s$
3. $(p \longrightarrow q) \wedge s$
4. $\neg s \wedge (\neg r \vee p)$
5. $\neg(r \vee s) \wedge q$

D. Construya la respectiva tabla de verdad para las siguientes proposiciones y con base en ella determine si la proposición dada es una tautología, una contradicción o una contingencia.

1. $(p \vee q) \longrightarrow (r \wedge \neg s)$
2. $\neg(p \wedge q) \longrightarrow s$
3. $\neg(p \longrightarrow q) \wedge s$
4. $(p \longrightarrow q) \wedge (s \longrightarrow (r \vee \neg t))$
5. $(\neg p \vee q) \wedge p$

E. Redacte una breve discusión frente a cuáles podrían ser las ventajas y desventajas de la simbolización de las proposiciones en lógica.

3.6 Negación y equivalencia de proposiciones moleculares

En la sección anterior se mostró cómo las proposiciones, en la lógica proposicional, pueden clasificarse en atómicas o moleculares. Es claro además que cada proposición atómica (p) tiene su correspondiente negación ($\sim p$). Sin embargo, frente a las proposiciones moleculares, la negación puede llevarse un paso más allá de la mera representación; la negación de una proposición molecular se puede descomponer y expresar como la negación de cada uno de sus componentes atómicos. No obstante, este proceso no es tan simple como negar cada elemento constitutivo de la proposición molecular. Es necesario ser cuidadosos a la hora de conservar *el sentido* de la negación de la proposición molecular. Por ejemplo, si alguien dijera: "no es cierto que pueda tomar bus o Transmilenio" no es lo mismo que decir "no es cierto que pueda tomar bus o no es cierto que pueda tomar Transmilenio", ya que si una persona no tiene ninguna de las dos opciones, esto no equivale a decir que tiene la opción de negar cualquiera de las dos. Más bien, la primera afirmación equivale a decir "no es cierto que no pueda tomar bus ni tampoco Transmilenio". Usando la lógica simbólica, la anterior equivalencia quedaría así expresada:

$$\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

En otras palabras, si se quiere negar una disyunción, esta negación puede descomponerse en la negación de cada una de las proposiciones que la componen mediante el operador conjuntivo.

Obsérvese que pasa algo muy similar cuando se quiere negar una conjunción. Si alguien dice "no es cierto que haya lavado los platos y tendido la cama", esto no equivale a decir que "no es cierto que no haya lavado los platos ni tampoco tendido la cama", ya que, al negar la conjunción de dos hechos, no es claro cuál de los dos hechos no se dio. Es por eso que la proposición equivalente sería "no es cierto que haya lavado los platos o no es cierto que haya tendido la cama". En lógica simbólica esto se expresa de la siguiente manera:

$$\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

Con respecto al condicional, podemos pensar en una situación en la que una relación condicional no se cumple. Supongamos que alguien dice "no es cierto que si un objeto sube entonces tenga que bajar". ¿Qué tendría que pasar para que se confirmara esta afirmación? De hecho, que un objeto suba y no baje. Es decir:

$$\sim(p \longrightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \sim q$$

Pero incluso más cosas se pueden extraer de la anterior fórmula. Suponga que aplicamos negación a ambos lados:

$$\sim\sim(p \longrightarrow q) \leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$$

Aplicando la doble negación al miembro izquierdo y la negación de la conjunción al miembro derecho se obtiene:

$$(p \longrightarrow q) \leftrightarrow \sim p \vee q$$

Esta última fórmula expresa básicamente que el condicional se puede expresar en términos de la disyunción, por lo que, estrictamente hablando, sólo la conjunción y la disyunción son operadores binarios suficientes para expresar todo lo que se necesita decir con la lógica proposicional simbólica.

3.7 Reglas de inferencia y demostraciones

Una de las áreas que hace parte del ámbito de estudio de la lógica en general es cómo realizar deducciones válidas a partir de cierto número de premisas o supuestos. Tanto la lógica proposicional clásica como la lógica de predicados utilizan reglas de inferencia que pretenden sintetizar las formas correctas de razonamiento del pensamiento humano y se conocen como los esquemas estoicos de inferencia.

Modus Ponendo Ponens. La regla de inferencia *modus ponendo ponens* —o simplemente *modus ponens*— establece que si se tienen como premisas un condicional y su antecedente, se puede deducir el consecuente. En este caso el esquema concede que se concluya el consecuente del condicional. Esto puede evidenciarse en el siguiente ejemplo:

> Premisa 1: Si Juan está en el parque, entonces está jugando fútbol.
>
> Premisa 2: Juan está en el parque.
>
> Conclusión (aplicando la regla *modus ponens*): Juan está jugando fútbol.
>
> En símbolos:

$$P \longrightarrow Q$$

$$P$$

$$\therefore Q$$

Modus Tollendo Tollens. En el *modus tollendo tollens* —o simplemente modus tollens—, se toman como premisas un condicional y la negación del consecuente. La regla entonces permite deducir la negación del antecedente del condicional:

> Premisa 1: Si Juan está en el parque, entonces está jugando fútbol.
>
> Premisa 2: Juan no está jugando fútbol.

Conclusión (aplicando la regla *modus tollens*): Juan no está en el parque.

En símbolos:

$$P \longrightarrow Q$$

$$\sim Q$$

$$\therefore \sim P$$

Modus Tollendo Ponens. El esquema *modus tollendo ponens* toma como premisas una disyunción y la negación de alguna de las proposiciones para concluir la veracidad de la otra proposición. Si se asume que la proposición elaborada a partir de la disyunción de dos proposiciones es verdadera, entonces al menos una de las proposiciones que la componen debe ser verdadera. Si en efecto se tiene como premisa que una de ellas es falsa, entonces necesariamente la otra debe ser verdadera; ya que de lo contrario la proposición compuesta no sería verdadera, contradiciendo la suposición inicial. El ejemplo sería de la siguiente manera:

Premisa 1: O Juan está en el parque o Juan está jugando fútbol.

Premisa 2: Juan no está en el parque.

Conclusión (por *modus tollendo ponens*): Juan está jugando fútbol.

En símbolos:

$$P \vee Q$$

$$\sim Q$$

$$\therefore P$$

Modus Ponendo Tollens. El esquema de inferencia *modus ponendo tollens* toma como premisas la negación de una conjunción y la afirmación de una de las proposiciones de dicha conjunción para concluir la negación de la otra proposición de la conjunción. Este principio se basa en el razonamiento que parte de la imposibilidad de la simultaneidad de dos eventos. A continuación sostiene la veracidad de uno de ellos para descartar la ocurrencia del otro. El ejemplo es el siguiente:

> Premisa 1: No es el caso que Juan esté en el parque y al mismo tiempo esté jugando fútbol.
>
> Premisa 2: Juan está en el parque.
>
> Conclusión (con base en la regla *modus ponendo tollens* aplicada a las premisas anteriores): Juan no está jugando fútbol.
>
> En símbolos:

$$\sim(P \vee Q)$$

$$P$$

$$\therefore \sim Q$$

Silogismo hipotético. El silogismo hipotético plantea una suerte de transitividad entre dos proposiciones compuestas en forma de condicional, formulando que, si se tienen como premisas dos condicionales en los que el consecuente del primero es el antecedente del segundo, se puede concluir que el antecedente del primero lo es también del consecuente del segundo. Este esquema entonces pretende mostrar cómo se debe tratar una cadena de condicionales que se encuentren unidos por sus proposiciones a manera de consecuente-antecedente. De esta manera, lo que se pretende conceptualizar acá es el suceso en el que, si la ocurrencia de 'a' es consecuencia de la ocurrencia de 'b', y así mismo la ocurrencia de ‘b’ es consecuencia de la ocurrencia de ‘c’, entonces se puede decir que en realidad la ocurrencia de ‘a’ se debe a ‘c’. Por ejemplo:

> Premisa 1: Si Juan está en el parque, entonces Juan está jugando fútbol.
>
> Premisa 2: Si Juan está jugando fútbol, entonces Juan se está viendo con sus amigos.
>
> Conclusión: Si Juan está en el parque, entonces Juan se está viendo con sus amigos.
>
> En símbolos:

$$P \longrightarrow Q$$

$$Q \longrightarrow R$$

$$\therefore P \longrightarrow R$$

Estos esquemas de inferencia, como se mencionó anteriormente, pretenden recopilar las formas correctas de razonar, y principalmente de determinar qué se puede deducir de qué partiendo de una proposición compuesta. Sin embargo, estos esquemas están fuertemente ligados a los principios del tercio excluido, de identidad y de no contradicción. Para ver esto, hay que mencionar una última regla de inferencia de la lógica clásica llamada *introducción de la disyunción*. Esta es otra regla de inferencia que tiene la particularidad de partir de una sola proposición y permite concluir una proposición compuesta dada por la disyunción entre la proposición de la premisa y otra cualquiera. De esta forma, de la premisa “Juan está en el parque”, la regla de introducción de la disyunción permite concluir la proposición “o Juan está en el parque o los elefantes vuelan”. En otras palabras, bajo esta regla a cualquier proposición verdadera se la puede vincular mediante una disyunción con cualquier otra proposición, independientemente de si ésta última es verdadera o falsa.

El interés será ahora determinar qué sucede si se acepta una contradicción lógica. Para esto, se tomarán como premisas una proposición y su negación:

> Premisa 1: Juan está en el parque.
>
> Premisa 2: Juan no está en el parque.

En virtud de la regla de introducción de la disyunción, puede agregarse mediante una disyunción una proposición cualquiera, por ejemplo, "los elefantes vuelan". A partir de lo cual se obtiene la primera conclusión:

> Conclusión 1 (por introducción de la disyunción aplicada a la premisa 1): o Juan está en el parque o los elefantes vuelan.

Obsérvese que ahora se tienen una disyunción (la conclusión 1) y una proposición que es la negación de una de las proposiciones de la disyunción (la premisa 2); lo que nos pone en posición para aplicar la regla de inferencia *modus tollendo ponens* a la conclusión 1 y la premisa 2, obteniendo lo siguiente:

> Conclusión 1: o Juan está en el parque o los elefantes vuelan.
>
> Premisa 2: Juan no está en el parque.
>
> Conclusión 2 (por *modus tollendo ponens*): los elefantes vuelan.

Como puede verse, partiendo de una contradicción no sólo pueden deducirse afirmaciones que contradigan la realidad, sino que se puede deducir la veracidad de prácticamente cualquier proposición; cualquier conclusión es válida. Este fenómeno es lo que se conoce como el principio de explosión, o *ex contradictione quodli-*

bet. Esto quiere decir que cualquier sistema discursivo que tenga una contradicción puede deducir como verdadera cualquier afirmación, restándole consistencia, coherencia y credibilidad.

En este punto ya se pueden formular entonces las características deseables de un razonamiento: que sea válido y que sea consistente. Un razonamiento se considera válido o congruente si las premisas implican la conclusión (Lenzen, 2004). En otras palabras, se dice que es válido cuando la conclusión efectivamente se deduce de las premisas mediante las reglas de inferencia válidas. Por ejemplo, considérese el siguiente razonamiento:

Premisa 1: Si es de noche, entonces está oscuro.

Premisa 2: Es de noche.

Conclusión: Está oscuro.

La conclusión "está oscuro" se deduce de las premisas mediante la regla de inferencia *modus ponens*. Es preciso hacer notar que la validez es independiente del valor de verdad de las premisas. Obsérvese por ejemplo que la conclusión anterior se deduce de las premisas independientemente de que, en efecto, sea de noche. Si además de que el razonamiento sea válido se tiene el caso de que las premisas son verdaderas, entonces se dice que el razonamiento es congruente.

Por otro lado, un razonamiento consistente, y la consistencia de manera general, se define como aquella propiedad que cumple un sistema en el cual no es posible deducir una proposición y su negación (Lenzen, 2004).

Con estas dos características se garantiza que el razonamiento o discurso que las cumpla está presentando un cuerpo teórico cuyas conclusiones son deducciones correctas de las premisas o suposiciones iniciales y además no caerá en la irrelevancia de poder deducir cualquier proposición como cierta; sino que por el contrario está planteando una propuesta conceptual que aporta al conocimiento humano.

Por supuesto, puede observarse que estas reglas pueden aplicarse usando la lógica simbólica para demostrar la legitimidad de ciertas conclusiones y validar de esta manera los razonamientos hechos. Esta técnica recibe el nombre de *demostración*. El esquema general que se utiliza es que se plantean una serie de premisas y se propone una conclusión que, supuestamente, se deduce de las premisas planteadas. La labor es entonces verificar que, aplicando las reglas de inferencia a las premisas, se deduce la conclusión propuesta.

Ejemplo 1

A partir de las premisas mostradas demostrar 'M'.

(1) $R \longrightarrow S$

(2) $S \longrightarrow T \vee M$

(3) $\sim T$

(4) R

Conclusión: M.

Solución: este tipo de ejercicios funcionan de manera similar al rompecabezas de un camino. Debemos armar las fichas que forman un camino de las premisas a la conclusión. La cuestión es que las fichas, para que puedan encajar, necesitan conectarse unas a otras mediante las reglas de inferencia, por lo que el orden en que se pongan las fichas no puede ser aleatorio, sino que deben encajar perfectamente con la regla de inferencia utilizada y deben ponerse de tal manera que marquen claramente el camino a la conclusión M.

En este sentido, obsérvese que, por ejemplo, la premisa 1 y 4 pueden juntarse y aplicar sobre ellas la regla *modus ponens*, obteniendo como resultado la proposición S. Acto seguido, dicha S se puede juntar con la premisa 2 y, aplicando nuevamente *modus ponens*, se obtiene T v M, que se puede combinar con la premisa 3 para obtener, a través del *modus tollendo ponens*, M.

Este proceso, descrito en prosa, puede parecer un poco confuso. Es por eso que se ha creado una herramienta de visualización que se denomina cuadro afirmación-razón. En este esquema, se construye un cuadro con dos columnas: una para las afirmaciones y otra para las justificaciones de dichas afirmaciones (que por lo general son reglas de inferencia). La anterior demostración, en el cuadro de afirmación-razón quedaría de la siguiente manera:

Afirmación	Razón
(1) $R \longrightarrow S$	Premisa.
(2) $S \longrightarrow T \vee M$	Premisa.
(3) $\sim T$	Premisa.
(4) R	Premisa.
(5) S	Modus ponens aplicado a las premisas (1) y (4).
(6) T v M	Modus ponens aplicado a la premisa (2) y a la afirmación (5).
(7) M	Modus tollendo ponens aplicado a la afirmación (6) y a la premisa (3).

3.8 Verificar la validez de los razonamientos

Recuérdese que un razonamiento es válido si la conclusión efectivamente se deduce de las premisas. Por lo tanto, los ejercicios de demostración que aquí se plantean en realidad buscan verificar la validez de los razonamientos que se presentan. De este modo, el razonamiento del ejemplo anterior hace parte de uno de los tantos que pueden presentarse en forma de argumentación en filosofía. Sin embargo, la lógica es la única herramienta que permite hacer una labor de verificación de la validez de ese razonamiento mediante, por ejemplo, el cuadro de afirmación-razón anteriormente explicado. En la lógica proposicional, aquel razonamiento al que no se le pueda descomponer de la forma en que se hizo en el ejemplo anterior —identificando claramente el camino que se sigue de las premisas a la conclusión en donde se justifique cada paso con alguna regla de inferencia válida—, no es posible considerarlo como un razonamiento válido en sentido estricto. Es por eso que la técnica de la demostración permite diferenciar entre razonamientos válidos y razonamientos falaces (ver aplicación 2).

Ejercicios

1. Hallar la descomposición que resulta de negar cada una de las siguientes proposiciones utilizando las reglas vistas en la sección "Negación y equivalencia de proposiciones moleculares":

   a) $\sim p \longrightarrow q$

   b) $p \rightarrow (q \vee r)$

   c) $(q \vee (p \rightarrow r))$

   d) $(p \wedge (\sim(\sim q \vee r) \wedge s)) \wedge (\sim t \longrightarrow \sim m)$

2. Realizar las siguientes demostraciones:

   a) (1) $R \longrightarrow S$

   (2) $R \vee Q$

   (3) $T \wedge V$

(4) $\sim R$

Conclusión: $Q \wedge T$.

b) (1) $R \vee S$

(2) $\sim P$

(3) $Q \vee \sim R$

(4) $P \leftrightarrow Q$

Conclusión: S.

c) (1) $P \longrightarrow R$

(2) $Q \longrightarrow R$

(3) $P \vee Q$

(4) $\sim S$

Conclusión: $R \wedge \sim S$.

3.9 Aplicación 2. Paradojas

Al hablar del análisis lógico de situaciones reales, es posible encontrar sucesos que parecen llegar a parecer una contradicción lógica. A estas situaciones se les denomina paradojas. Uno de los filósofos más famosos en la formulación de paradojas fue Eubúlides de Mileto.

Eubúlides de Mileto vivió hacia el IV siglo antes de Cristo. Fue un filósofo de la escuela de Megara y estudiante de Euclides de Megara, quien a su turno fue discípulo de Sócrates. Eubúlides fue contemporáneo con Aristóteles y de acuerdo con Rescher (2001), uno de los grandes promotores en la discusión de las paradojas. Rescher (2001, p.78) además sostiene que la escuela de Megara heredó de los sofistas la utilización de las paradojas. Los sofistas ya estaban familiarizados con las *aporías* y las usaban para argumentar que la razón era insuficiente para comprender la realidad de las cosas. Sin embargo, el interés de la escuela no era argumentar escepticismos, sino el estudio de la erística[14]; la elaboración de un discurso exitoso para una disputa dada refutando los argumentos del oponente. Por otro lado, Copleston (2007 (I), p.105) sostiene que la razón de la formulación de estas paradojas era esencialmente apoyar argumentativamente las tesis de la escuela mostrando que, negarlas, lleva a una contradicción[15]. Esta técnica viene de la escuela eleata, en donde Zenón diseñó sus famosas paradojas para probar las tesis de la negación de la existencia del movimiento y del cambio de su maestro Parménides. No hay que olvidar sin embargo que la escuela de Megara heredó muchas de sus ideas de la escuela de Elea, incluida su ontología. Por lo tanto, no sería de extrañar que la paradoja de sorites haya sido diseñada para demostrar que "lo que es (un montón)" no puede surgir de "lo que no es (un montón)". Aun así, y como se mostrará más adelante, el centrar la atención sobre las paradojas vino a generar (en gran parte debido a la filosofía analítica en el siglo XX) inmensos avances en la investigación y comprensión del lenguaje, el concepto de verdad, la lógica y los juicios.

A Eubúlides, y en general a la escuela de Megara, se le atribuye la formulación de 7 paradojas en la Antigua Grecia:

---

14 La erística, de las raíces griegas *eris* (disputa) y *techne* (manera, procedimiento), era una técnica discursiva que se caracterizaba por procurar que el fin de un debate o conflicto se diera en términos de un argumento que se imponía sobre otro independientemente de su concordancia con la realidad o la búsqueda de la verdad. Era una práctica común entre los sofistas como forma de refutar al oponente y ganar controversias.

15 Esta técnica lógica se denomina *reductio ad absurdum* (reducción al absurdo).

1. La paradoja del mentiroso (*pseudomenos*).
2. La paradoja del hombre enmascarado (*dialanthanon*).
3. La paradoja de Electra (*egkekalummenos*).
4. La paradoja del hombre alto (*egkekalummenos*).
5. La paradoja del montón (*sorites*).
6. La paradoja del calvo (*phalakros*).
7. La paradoja de los cuernos (*keratines*).

Las paradojas pueden agruparse en categorías. La primera, que abarca las paradojas del primer tipo, son aquellas que se basan en juicios autorreferenciados. El caso más conocido de estos es la famosa paradoja del mentiroso, en donde la afirmación "yo soy un mentiroso" de ser verdadera o falsa, siempre lleva a una contradicción. La segunda categoría abarca la segunda, tercera y cuarta paradoja, y tiene que ver con la relación entre reconocer y conocer algo o a alguien. Por ejemplo, ¿se podría afirmar que Andrea conoce a su hermano aún si su hermano está disfrazado y ésta no logra reconocerlo? La quinta y sexta paradoja forman una tercera categoría, y se centran en la ambigüedad de los términos para definir objetos o características —que es el tipo de paradojas que se tratarán este trabajo— y la última categoría que contiene la séptima paradoja, que consiste en la presuposición de existencia cuando no hay pérdida.[16] La versión más conocida de este tipo de paradoja es el siguiente razonamiento:

Premisa 1: Juan no tiene cuernos.

16 Para el interesado, la descripción completa de todas las paradojas de Eubúlides puede encontrarse en: Rescher, N. (2001). *Paradoxes. Their roots, range and resolution*. Open Court Publishing.

> Premisa 2: Si Juan no ha perdido algo es porque todavía lo tiene.
>
> Premisa 3: Juan no ha perdido cuernos.
>
> Conclusión: Juan (todavía) tiene cuernos (por la regla *modus ponens* aplicada a la premisa 2 y 3).
>
> Contradicción entre la conclusión y la premisa 1.

Como puede notarse, estas cuatro categorías de paradojas plantean interrogantes en áreas como la filosofía del lenguaje, la filosofía analítica y la lógica misma. Sin embargo, encuentro de especial interés la paradoja de *sorites* no sólo por su relación con la ambigüedad —aspecto central en la filosofía analítica y del lenguaje—, sino porque abarca relaciones de cambio cuantitativas y cualitativas[17], que son elementos fundamentales en el estudio de diversas problemáticas de la filosofía contemporánea. Por otro lado, dejar de lado el estudio de ciertas paradojas en el lenguaje, puede dar pie a razonamientos y afirmaciones de carácter social y político que son aparentemente impecables en la lógica utilizada.

La hoy denominada paradoja de *sorites* se llamó inicialmente paradoja del montón (*soros* = montón). De acuerdo con Rescher (2001), la forma original de la paradoja es la siguiente:

> Claramente 1 es un número pequeño. Y si *n* es un número pequeño, también *n + 1* lo será. Pero esto lleva directamente a tener que decir que un número obviamente grande (digamos muchos billones) es un número pequeño. (2001, p.79, nota al pie 6.)

17 Obsérvese que, en la paradoja de *sorites*, el agregar progresivamente cierto número de granos de arena (cambio cuantitativo) eventualmente forma un ‘montón’ de arena que antes no estaba ahí (cambio cualitativo).

Más adelante, para darle mayor fuerza a la afirmación “1 es un número pequeño”, se empleó la analogía con los granos de arena, ya que podría decirse que el número 1 se refiere a una tonelada de naranjas, que equivale a 1000 kilogramos, en donde ya no se estaría tan seguro de estar hablando de un número pequeño (¿pequeño respecto a qué?). Mientras que sí existiría un consenso al afirmar que un grano de arena es algo muy pequeño, más aún comparado con un montón de arena.

Así pues, la versión del montón de arena de la paradoja de *sorites* conocida comúnmente es la expuesta por Hájek & Novák (2003):

> Un grano de arena no forma un montón. Agregar un grano a lo que todavía no es un montón, tampoco forma un montón. En consecuencia, no existen montones. (2003, p.1)

Lo primero que se advierte en esta forma de la paradoja es el uso excesivamente ambiguo de la terminología clasificatoria. ¿Qué es un montón? Si se está cuantificando en granos de arena, ¿cuántos granos de arena forman un montón? ¿Cuántos granos de arena no lo forman? A primera vista podría pensarse que resolviendo estos interrogantes se puede solucionar la aparente contradicción que no parece ser más que un juego de ambigüedad de palabras. Pero, aunque encontrar un consenso general de cuántos granos de arena forman un montón es ya de por sí problemático, podría asignarse un número razonablemente grande (digamos un millón de granos de arena) para asociarlo (por el bien del argumento) con un montón, y a su vez acordar que, un sólo grano de arena claramente no forma un montón, con el fin de determinar si en efecto esto pone punto final a la cuestión. Esto formula una versión *cuantificada* de la paradoja de *sorites*, recogida por Kim (1996).

Siguiendo a Kim et. al. (p.576), la paradoja puede así plantearse de dos formas: una positiva y una negativa. La primera de ellas es puesta, a manera de premisas-conclusión, de la siguiente manera:

> Premisa 1: Una colección de un millón de granos de arena es un montón.
>
> Premisa 2: Si una colección de *n* granos de arena es un montón, entonces también lo es una colección de *n-1* granos de arena.
>
> Conclusión: Cualquier colección de granos de arena forma un montón.

La forma negativa se basa en el siguiente razonamiento:

> Premisa 1: Una colección de un grano de arena no forma un montón.
>
> Premisa 2: Si una colección de *n* granos de arena no forma un montón, entonces una colección de *n + 1* granos de arena tampoco lo forma.
>
> Conclusión: Ninguna colección de granos de arena forma un montón.

Analicemos ahora cómo se llega a estas conclusiones. Por simplicidad se estudiará solamente la forma negativa de la paradoja. El estudio de la positiva queda como ejercicio.

La forma positiva de la paradoja parte de la premisa p_1: “Una colección de un grano de arena no forma un montón” que, por ser premisa, debemos asumirla como verdadera. Ahora, sea la proposición p_2: “Una colección de dos granos de arena no forma un montón”. La pregunta es: ¿será esta proposición verdadera? Veamos:

Debido a que la proposición p_2 aumenta en uno el número de granos de arena de los que habla p_1, entonces, por la premisa 2, $p_1 \longrightarrow p_2$ es verdadera. Sumado a esto, vimos en el párrafo anterior que p_1 se tomaba como verdadera. Por tanto, tenemos el siguiente escenario:

$$p_1 \longrightarrow p_2$$

$$p_1$$

De donde, aplicando *modus ponens*, se obtiene p_2. Es decir, la proposición p_2: "Una colección de dos granos de arena no forma un montón" es verdadera.

Ahora consideremos la proposición p_3: "Una colección de tres granos de arena no forma un montón" y continuemos con la misma pregunta, ¿será esta proposición verdadera?

Ya sabemos que p_2 es verdadera, y que p_3 aumenta en uno el número de granos de arena del que habla p_2. Por tanto, por la premisa 2, $p_2 \longrightarrow p_3$ es verdadera. De esta forma, se tiene ahora lo siguiente:

$$p_2 \longrightarrow p_3$$

$$p_2$$

De donde, al aplicar *modus ponens*, se infiere p_3.

Como el lector ya puede adivinar, este proceso de inferencia puede continuar indefinidamente y llegar a que afirmaciones como p_{MM}: "Una colección de mil millones de granos de arena no forma un montón" sean verdaderas y, debido a que esto puede aseverarse para cualquier número de granos de arena, es posible entonces concluir que ninguna colección de granos de arena forma un montón.

La paradoja de *sorites* parece, a primera vista, un divertimento netamente teórico. Pero, no obstante, tiene importantes aplicaciones en la realidad. Basta con mencionar el ejemplo dado por Zach Weber (Weber & Colyvan, 2010) acerca de las especies animales en peligro de extinción: si existen 100.000 animales de la especie x, no se considera que estén en vía de extinción. Tampoco si existen 99.999. Tampoco si existen 99.998, etc. Se concluye entonces que la especie x nunca estará en peligro de extinción. Y, como este razonamiento puede aplicarse a cualquier especie animal x, se infiere lógicamente que no hay especies en peligro de extinción.

También, la paradoja de *sorites* surge en discusiones de un gran impacto social y jurídico, como aquella que busca establecer en qué momento (o mejor, a qué tiempo) se podría considerar que la vida humana inicia (Field, 2003) para que, una vez establecido esto, se puedan debatir legislaciones frente al aborto y temas relacionados. Estas dos situaciones ponen de relieve la importancia del estudio de este tipo de paradoja en los discursos que utilizan el lenguaje común y la lógica clásica.

4. Apartado final

A lo largo de la nota de clase se pudo observar no sólo algunos trazos de la evolución histórica sino conceptual de la lógica proposicional. Es claro que la tendencia en este respecto es hacia el simbolismo como herramienta sintáctica que proporciona una mayor rigurosidad a la hora de formalizar y evaluar los razonamientos. Frente a eso, esta nota de clase aporta elementos sustanciales a la hora de mostrar tanto las fortalezas como las debilidades de la simbolización de los procesos lógicos. Aquel estudiante que se haya dado la oportunidad de aceptar la invitación a explorar estos procesos puede ahora tener un criterio para juzgar qué tan pertinente puede llegar a ser esto a la hora de analizar los razonamientos que se encuentran en las diversas posturas y propuestas filosóficas.

Sumado a esto, el aprendizaje de la lógica simbólica permite fortalecer una estructura rigurosa de argumentación filosófica. Esto es posible gracias al paso de abstracción característico de la simbolización. Esta abstracción abre el camino para poder entrever, de forma clara, la composición de la estructura del razonamiento sin distraerse con el contenido semántico, permitiendo una evaluación mucho más transparente que el que puede hacerse a partir de una simple silogística.

Con todo esto, espero haber cumplido el objetivo de ofrecer con esta nota de clase un recurso bibliográfico para el aprendizaje de la asignatura Lógica II y que este recurso sirva en efecto para proveer una estrategia didáctica de apoyo al aprendizaje de los contenidos de la asignatura mencionada.

Referencias

Aberdein, A., Aho, T., Badesa, C., Bhattacharyya, S., Capozzi, M., Chatterjee, A., Lenci, A. (2009). *The Development of Modern Logic*. (L. Haaparanta, Ed.). New York: Oxford University Press.

Beiser, F.C., 2009. *Normativity in Neo-Kantianism: Its Rise and Fall.* International Journal of Philosophical Studies, 17: 9-27.

Boole, G. (1847). *The Mathematical Analysis of Logic : Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning* (2009th ed.). Cambridge University Press.

Boole, G. (1854). *An Investigation of the Laws of Thought*. (Cambridge, Ed.). London: Walton and Maberly.

De Morgan, A. (1847). *Formal Logic: Or, The Calculus of Inference, Necessary and Probable*. Taylor and Walton. Obtenido de: https://books.google.com.co/books/about/Formal_Logic.html?id=HscAAAAAMAAJ&redir_esc=y

Douven, I. (2015). *The epistemology of indicative conditionals : formal and empirical approaches*.

Edgington, D. (2014). Indicative conditionals. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Obtenido de: https://plato.stanford.edu/entries/conditionals/#ArgAgaTru

Field, H. (2003). *No Fact of the Matter*. New York University.

Grattan-Guinness, I. (1994). *Companion encyclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences*. Routledge.

Gregory, D. F. (1839). On the Real Nature of Symbolical Algebra. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, *14*(1), 208–216. http://doi.org/10.1017/S0080456800021529

Jacquette, D. (2006). Introduction: Logic, Philosophy, and Philosophical Logic. In *A Companion to Philosophical Logic* (pp. 1–8). http://doi.org/10.1002/9780470996751.ch1

Keefe, R. (2007). Vagueness Without Context Change. *Mind, 116*(462), 275–292. http://doi.org/10.1093/mind/fzm275

Lenzen, W. (2004). *Handbook of the History of Logic*. *Bulletin of Symbolic Logic* (Vol. 1). http://doi.org/10.1016/B978-0-444-51621-3.50012-8

Lewis, D. K. (David K. (2001). *Counterfactuals*. Blackwell Publishers.

Kusch, M. (2015). "Psychologism", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2015 Edition), Edward N. Zalta (ed.)

Peckhaus, V. (1997). *Logik, Mathesis universalis und allgemeine Wissenschaft : Leibniz und die Wiederentdeckung der formalen Logik im 19. Jahrhundert*. Akademie Verlag. Obtenido de: https://books.google.com.co/books/about/Logik_Mathesis_Universalis_Und_Allgemein.html?id=FevWAAAAMAAJ&redir_esc=y

Peckhaus, V. (2003). The Mathematical Origins of 19th Century Algebra of Logic. Obtenido de: https://pdfs.semanticscholar.org/9afd/c33b44792492d01024a6026bf5d05594a049.pdf

Rath, M. (1994). *Der Psychologismusstreit in der deutschen Philosophie*. Verlag K. Alber. Obtenido de: https://www.herder.de/philosophie-ethik-shop/der-psychologismusstreit-in-der-deutschen-philosophie-gebundene-ausgabe/c-27/p-4926/

Russell, B. (1912). *The problems of philosophy*. London: Wilder Publications.

Russell, B. (1923). Vagueness. *Australasian Journal of Psychology and Philosophy*, *1*(2), 84–92. http://doi.org/10.1080/00048402308540623

Schröeder, E. (1877). *Der Operationskreis Des Logikkalkuls*. Leipzig: Teubner. Obtenido de: https://www.amazon.com/Operationskreis-Logikkalkuls-Primary-Source-German/dp/1293875716

Schröeder, E. (1890). *Vorlesungen über die algebra der logik*. Leipzig: Teubner. Obtenido de: https://books.google.com.co/books/about/Vorlesungen_über_die_algebra_der_logik.html?id=rIFKAAAAYAAJ&redir_esc=y

Smith, P. (2003). *An Introduction to Formal Logic*. New York: Cambridge University Press.

Sorensen, R. (2001). *Vagueness and Contradiction*. New York: Oxford University Press.

Stalnaker, R. (1975). Indicative conditionals. *Philosophia*, *5*(3), 269–286. http://doi.org/10.1007/BF02379021

Williamson, T. (1994). *Vagueness*. Londres: Routledge.

Notas de clase