NOTAS DE CLASE

3

Guía básica para el desarrollo e interpretación de los modelos matemáticos de programación lineal

Oscar Oswaldo Echavarría S.

Juan Carlos Acosta Quevedo

Editorial UNIAGUSTINIANA

Guía básica para el desarrollo e interpretación de los modelos matemáticos de programación lineal

Colección *Notas de clase*, n.º 3
doi: 10.28970/ua.nc.2017.n3

Editorial Uniagustiniana
Ruth Elena Cuasialpud Canchala, Coordinadora de Publicaciones
Mariana Valderrama y Catalina Ramírez, Asistentes editoriales

Proceso de edición
Corrección de estilo, Ángela Marcell Cruz Parra
Diagramación, Alejandro Farieta-Barrera
Diseño de portada, Alejandra Torres Mendoza

Campus Tagaste, Av. Ciudad de Cali No. 11B-95
coor.publicaciones@uniagustiniana.edu.co
literaturagris@uniagustiniana.edu.co

Guía básica para el desarrollo e interpretación de los modelos matemáticos de programación lineal

Oscar Oswaldo Echavarría S.
Estudiante de Doctorado en Administración,
Universidad de Celaya, México
Maestría en gestión integrada de calidad, seguridad y medio ambiente,
UDM, Viña del Mar, Chile
Docente Facultad de Ingeniería,
Universitaria Agustiniana, Bogotá, Colombia
Correo electrónico: oscar.echavarria@uniagustiniana.edu.co

Juan Carlos Acosta Quevedo
Máster en Sistemas integrados de gestión,
Universidad internacional de la Rioja, Logroño, España.
Docente Facultad de Administración de Empresas,
Universitaria Agustiniana, Bogotá, Colombia
Correo electrónico: juan.acosta@uniagustiniana.edu.co

Resumen

La presente propuesta de nota de clase surge del trabajo en el aula, donde se observa la dificultad del estudiante al abordar los temas y estudiar en los textos básicos indicados en la bibliografía. La fase introductoria no es de fácil asimilación, bien sea por la variada escala de competencias y conocimiento de la matemática requerida y también como fruto de experiencias insatisfactorias pasadas. Esta propuesta de nota de clase busca establecer por medio de un lenguaje sencillo puentes entre el estudiante y los temas a tratar, a partir de la experiencia en el desarrollo de cursos de investigación de operaciones y con el objetivo de poder entregar al estudiante desarrollos base que le permitan obtener un primer paso ameno y satisfactorio, que deje sembrada la semilla de una capacidad que lo lleve a explorar en ambientes cada vez de mayor complejidad.

El lenguaje del texto busca tener la mayor cercanía al cotidiano del estudiante, no tan solo en su forma sino también en sus modos: los ejemplos están ampliamente explicados y pretenden generar reflexión que transforme la curiosidad en conocimiento.

El desarrollo de la nota de clase inicia con una información general de la investigación de operaciones, sus principales hitos y su interpretación por medio de la modelación en el campo de los procesos y la toma de decisiones frente a problemas reales de la organización. Continúa con una presentación de los conceptos básicos de linealidad, que le permitan al estudiante ir construyendo conceptos y tejer redes entorno al manejo de las ecuaciones lineales, sus sistemas de desarrollo, y su representación gráfica. El manejo de las inecuaciones como piso fundamental sobre el que construir todo el principio de modelación matemática de los problemas de programación lineal, expresado en función objetivo y las restricciones. Terminan estas notas desarrollando problemas de PL por medio del método gráfico.

Palabras clave: programación lineal, modelos matemáticos, investigación de operaciones, optimización lineal, método gráfico.

Cómo citar

Echavarría S., O. O., y Acosta Q., J. C. (2017) *Guía básica para el desarrollo e interpretación de los modelos matemáticos de programación lineal*. Notas de clase 3. Bogotá: Uniagustiniana.

Contenido

Introducción

La Investigación de operaciones ha ido ganando terreno durante las últimas décadas en el ámbito del análisis de los problemas organizacionales. El desarrollo de modelos matemáticos que apoyados en la evolución tecnológica de aplicaciones y herramientas dé soporte para el procesamiento de los datos han evolucionado y transformado la forma de tomar decisiones en la empresa.

Este proyecto de notas de clase busca servir de medio en el acercamiento inicial del estudiante en el conocimiento y aprehensión de conceptos que le permitan generar iteración, participación y cambio en las dinámicas de la empresa donde los modelos pueden ser aplicables.

Los autores manifiestan su intención de que el alumno encuentre en estas notas de clase un medio para desarrollar su pensamiento crítico, para validar fundamentos matemáticos relacionados con las ecuaciones y los sistemas lineales a través de un camino propuesto en una secuencia que va de menor intensidad a mayor complejidad.

Si uno de nuestros estudiantes encuentra que las presentes notas le ayudan en la interpretación, formulación, análisis y/o generación de cambios en la mejora propuesta para los problemas de estudio a los cuales se ve enfrentado, se habrá logrado el objetivo.

Unidad 1
Historia de la investigación de operaciones

Resumen

En esta unidad se presenta información cronológica de relación entre hechos, autores y propuestas de intervención en solución de problemas de amplio reconocimiento, que permita formar un concepto sobre el nacimiento, evolución y proyección de la Investigación de Operaciones (ciencia que para el desarrollo de estas notas de clase se podrá llamar de forma abreviada como IO). El marco desde el cual se desarrolla esta unidad es referencial y no pretende ser de compleja exactitud, ya que como se verá posteriormente, la datación de los hitos es referida y soportada sobre fechas y momentos dentro de periodos de pensamiento y evolución humanos, y no sobre un proceso de investigación exhaustivo del origen de estos.

Palabras clave: evolución, Investigación de Operaciones IO, problema, modelo, modelación matemática.

Prefacio

Sin duda es de gran valor conocer los antecedentes que dan origen a un suceso, método o cualquier tipo de expresión que se pueda utilizar de forma activa en la búsqueda de soluciones a inquietudes derivadas de las actividades humanas. Esta acción permite dar una estructura sólida sobre la que se construirá el conocimiento a partir de los demás conceptos.

1. Historia y evolución de la IO

Encontrar datos exactos con los cuales poder determinar el nacimiento de la Investigación de Operaciones es una actividad de gran complejidad, pues los tiempos inciertos que pueden referir hechos relacionados con procesos donde se utilizó el conocimiento para representar fenómenos y obtener respuestas que permitieron su predicción, son poco confiables. Si bien en la época moderna encontramos mayor precisión, los registros históricos se soportan sobre hechos y datos obtenidos por grupos de investigadores que utilizando conceptos y lenguaje matemático en sus estudios han determinado respuestas óptimas a problemas diversos, con lo que se puede considerar el nacimiento formal de la IO como ciencia. La historia de las guerras mundiales permite la identificación de hitos presentes en el escenario de la evolución matemática y su aplicación en la búsqueda de soluciones posibles a problemas

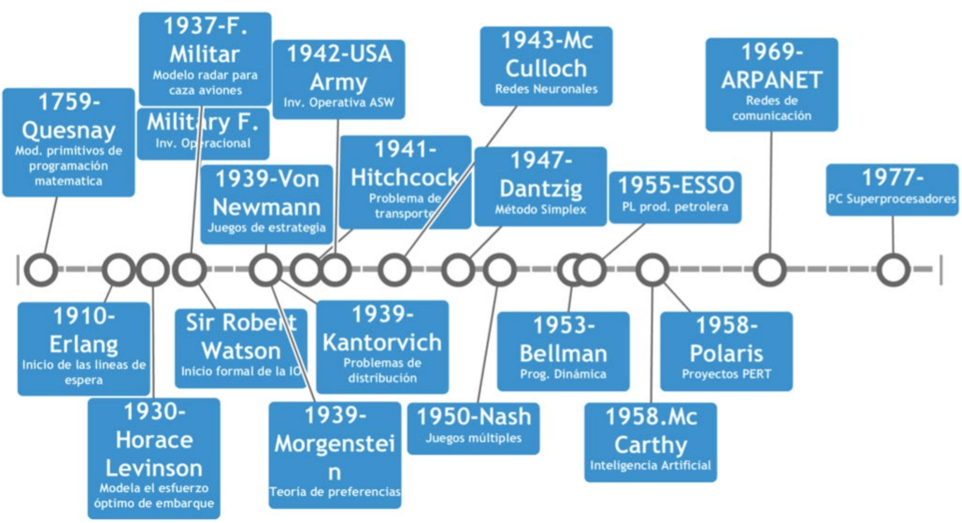


Figura 1. Línea de tiempo de la IO. Fuente: elaboración propia.

presentes en el quehacer de las organizaciones, en especial a los múltiples problemas generados por la industria militar en un escenario de guerra. En la figura 1 se puede observar la evolución de la Investigación de Operaciones a partir de la conformación de grupos de investigadores reunidos para analizar y proponer alternativas a problemas de distribución, asignación y comunicaciones principalmente entre los cuadros de mando militar y las tropas en los frentes de batalla.

En un intento de fijar hitos o etapas significativas para la IO se puede señalar al periodo de la Segunda Guerra Mundial como el gran generador de la mayoría de los modelos matemáticos que actualmente se operan en todo tipo de organizaciones. Los inmensos desafíos de la actividad bélica pusieron contra las cuerdas los procesos relacionados con las estrategias de avance y sostenimiento de las tropas en los puntos de batalla, no fueron pocos los fracasos y pérdidas de todo tipo de recursos, lo que llevó a que las grandes potencias industriales de la época reunieran a científicos multidisciplinarios para que diseñaran actividades que permitieran tomar ventaja y dominio sobre el contendor.

Un segundo periodo clave en el desarrollo y evolución de la Investigación de Operaciones se da con la aparición masiva de los súper procesadores a escala personal. La capacidad de proceso que se dio al contar con máquinas capaces de procesar millones de datos por segundo impulsó la programación de los modelos y el uso de estos en múltiples áreas de las organizaciones, así se pudo dar respuesta óptima a problemas que se consideraban de solución imposible, se abrió el escenario de infinitas posibilidades al uso de estos modelos de optimización.

El punto de partida para abordar la historia de la investigación de operaciones será el de encontrarle una definición, la que por metodología se construirá a partir de sus elementos semánticos. ¿Qué es investigación? Para los propósitos de esta unidad, es la aplicación del método científico en la búsqueda de respuestas a los interrogantes que originan las preguntas base de la investigación. Por su parte Hernández, Fernández y Baptista (2014) expresan que "la investigación es un conjunto de procesos sistemáticos, críticos y empíricos que se aplican al estudio de un fenómeno o problema" (p.4); la aproximación entonces se da por el marco general de los pasos del método científico (ver figura 2) y su efectiva participación en la obtención de respuestas y soluciones a los problemas objetivo.

Una interpretación del método científico permite, en relación con su aplicación en la construcción científica de modelos, indicar que "el propósito del método científico clásico es

Figura 2. El método científico. Fuente: Fullciencia. (2012). Infografía 2 el método científico. Recuperado de: https://goo.gl/KgpMbm.

suprimir el juicio humano como una influencia que contamina o impone prejuicios en el conocimiento y la comprensión. (Eppen, 2000, p.9). La participación humana es fundamental en la toma de decisiones y su juicio no podrá ser suprimido de este proceso, lo que establece una contraposición hacia los principios base del conocimiento científico donde Eppen (2000) indica: "la verificación de teorías o resultados mediante la experimentación repetida y controlada es el meollo de la adquisición de conocimientos en la ciencia" (p.9). De manera desafortunada, pocas situaciones organizacionales pueden ser repetidas múltiples veces en condiciones de control y experimentación, lo que da valor y participación al juicio humano a su intuición para la búsqueda de una solución adecuada a las condiciones y entorno donde la organización o la persona se encuentra. El aporte científico al proceso de toma de decisiones soportada en modelos se considera en el rigor y disciplina con la que se establecen y ejecutan los pasos, técnicas y herramientas utilizadas en la búsqueda de respuestas posibles a un problema o situación de interés que dio origen al mismo proceso de búsqueda.

Ahora, el interés se centra en la definición de Operaciones. Este reto se puede desarrollar al interpretar la operación como la secuencia de actividades que permiten el logro de un objetivo y el establecimiento de resultados posibles. Si bien en un contexto de manufactura la operación se puede interpretar como el camino que permite la transformación de recursos de entrada en la obtención de un resultado, no es menos tangible su aplicación en un contexto cualitativo donde lo intangible del servicio se contrasta con su momento de verdad o resultado, evidenciando la secuencia de actividades y la transformación de los recursos de entrada en el nivel de satisfacción del cliente o usuario con el producto de salida.

Dentro de un marco referido a un contexto práctico y ajustado al reconocimiento de vivencia y experiencia, una aproximación a definir IO, según Izar (2012) plantea que "puede definirse como un grupo de métodos y técnicas aplicables a la solución de problemas operativos de los sistemas" (p.12). En un campo más amplio "suele conocérsele como ciencia de la administración o como métodos y modelos cuantitativos para la toma de decisiones (Davis y McKeown, 1986, p.12). Es importante recordar como lo indica Hillier (2010) al referirse a los orígenes de la IO que sus trazas inician cuando "se hicieron los primeros intentos por emplear el método científico para administrar una empresa" (p.1). Se puede entender la IO como la disciplina que aplica el método científico para la búsqueda de soluciones a problemas de la organización, promoviendo una toma de decisiones que optimiza los resultados posibles. A partir de este punto y para todas las demás unidades de estudio, este será el referente e interpretación de Investigación de Operaciones.

Al considerar que la IO es una herramienta valiosa para la toma de decisiones, es necesario hablar un poco sobre este proceso y la forma como se enfoca en el presente material de estudio. La toma de decisiones, como fin y medio de procesos que van desde qué ropa voy a usar hoy hasta la respuesta afirmativa al lanzamiento de la bomba atómica sobre Hiroshima, sin duda es de gran complejidad. ¿Qué campo de nuestro actuar no se ve afectado por la toma de decisiones? La respuesta a esta pregunta tiene todo tipo de escenarios, desde el escepticismo y esoterismo hasta la más pura y exacta demostración del paso a paso para hacer la toma de decisiones.

Una toma de decisión que puede ser representada como un proceso (ver figura 3) que en su génesis es tan antiguo como la misma acción del hombre enfrentado a sus problemas, en una permanente búsqueda de alternativas que torne la situación no esperada en un escenario satisfactorio para su evolución; una toma de decisión tan antigua como la misma presencia humana en el universo, inmersa en un proceso infinito y continuo de problemas y soluciones.

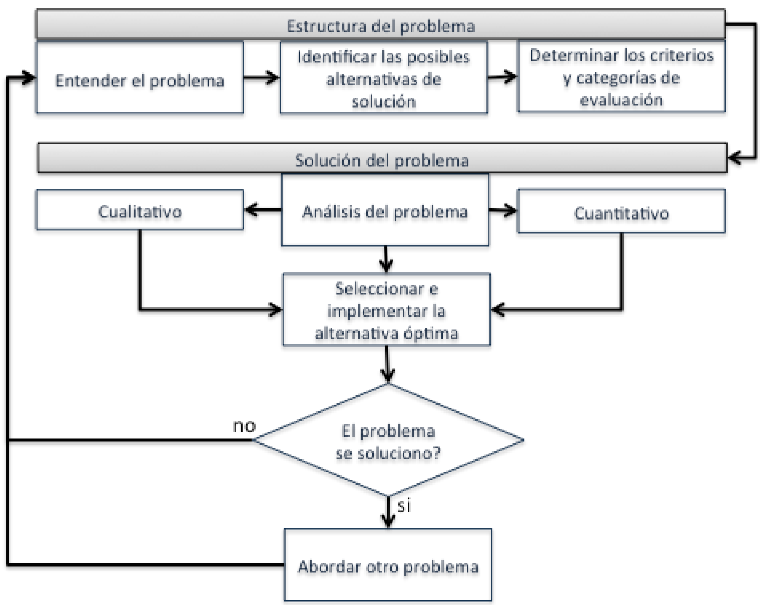


Figura 3. Protocolo para análisis y solución de problemas. Fuente: elaboración propia.

¿Qué es un problema?, para lo tratado en el presente trabajo, se entenderá problema como la diferencia entre una condición o resultado esperado y la condición o resultado real, toda brecha conforma un problema que puede ser analizado en sus causas y proponer acciones de cierre que comúnmente se conoce como mejora.

Una mirada más formal, permite entender la Investigación de Operaciones como la ciencia aplicada que se utilizó en el análisis de problemas inmensos surgidos durante la segunda guerra mundial. La ciencia que permitió definir actividades en relación con tácticas y estrategias que propusieran soluciones posibles y generaran la ventaja competitiva a las tropas aliadas en pro del éxito esperado. Inglaterra se constituye en la nación donde se puede referir el nacimiento de la Investigación de Operaciones, Taha (2012) presenta que fue Inglaterra la nación donde se referencia el nacimiento de la IO "cuando un equipo de científicos empezó a tomar decisiones con respecto a la mejor utilización del material bélico" (p.1). La evolución de la IO se fortaleció cuando: "Al término de la guerra, las ideas formuladas en operaciones militares se adaptaron para mejorar la eficiencia y productividad en el sector civil" (Taha, 2012, p.1). La reunión de científicos con el objetivo de estudiar bajo principios cuantitativos el diseño de métodos para la toma de decisiones asociadas con la mejor utilización de los escasos y costosos materiales utilizados en la guerra, dio sus frutos y permitió el desarrollo de estrategias que contribuyeron al éxito de las tropas aliadas, sin embargo la guerra no es el único escenario donde aplicar los principios descubiertos de la IO, al convocar y reunir científicos de diversas disciplinas como se observa en la figura 4 con el detalle estructural del denominado Circo de Blackett, donde es interesante observar la pluralidad profesional de sus integrantes, se busca y obtiene un escenario de revisión, análisis y propuesta enriquecido y fortalecido por la diversidad intelectual y de criterio. Terminada la guerra, la organización de estos grupos de científicos se disuelve y los mismos se desplazan para continuar sus trabajos de orden empresarial y académico, trasladando a sectores de manufactura y servicios la experiencia adquirida y el conocimiento desarrollado sobre la modelación cuantitativa, lo que dio nacimiento a una nueva época para el desarrollo

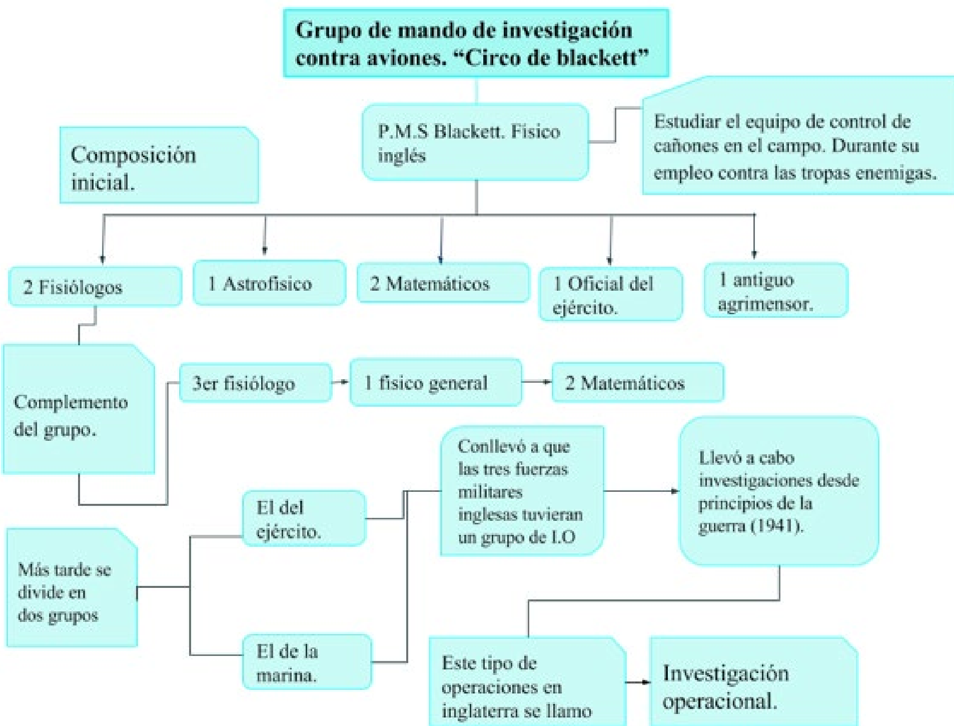


Figura 4. Circo de Blackett, estructura operativa. Fuente: elaboración propia.

empresarial.

El éxito inmediato que se obtuvo en la búsqueda de soluciones y toma de decisiones frente a los múltiples problemas empresariales por medio de la utilización de los métodos cuantitativos diseñados durante la guerra, le dio el carácter de ciencia a la IO y la convirtió en un eje de estudio principal para científicos de otras áreas. La programación matemática comenzó una era dorada, la cual, hasta nuestros días, continua en evolución, los principios de optimización son válidos y el nuevo conocimiento adquirido a partir de la aplicación de los modelos establecidos en asocio con el nacimiento de equipos de cómputo de mayor capacidad y potencia de procesamiento, le permiten a la Investigación de Operaciones traspasar la frontera de lo cualitativo y determinístico, para abordar problemas de orden estocástico, donde las propuestas de solución también son útiles y en gran medida óptimas.

2. *Apartado final*

Aplicando el concepto de investigación estudiado, se invita al estudiante a efectuar una prospectiva de la IO. Seleccione tres sectores de la economía donde pueda tener información amplia y suficiente que le permita elaborar por medio de cualquier tipo de organizador gráfico la presentación de sus principales problemas y las herramientas que están utilizando en la búsqueda de su solución.

Unidad 2
Modelación

Resumen

Al estudiar la Investigación de Operaciones la aparición de los modelos es fundamental. Un modelo permite la materialización del concepto, por medio del modelo se puede hacer abstracción de un fenómeno, de su realidad, de su contexto. En la presente unidad usted encontrará algunas definiciones que le permitan ubicar el concepto y la importancia que tiene el modelo en el desarrollo de la IO como ciencia para buscar solución a problemas, estudiará los diferentes tipos de modelo y efectuará un acercamiento al uso de las ecuaciones aprendidas en los cursos de algebra como base para la formulación de modelos matemáticos lineales.

Palabras clave: modelo, modelación, modelo matemático, programación lineal, optimización

Prefacio

Un modelo permite formalizar, por lo menos de forma esquemática en ausencia de datos o relaciones que luego permitan hacerlo cuantitativamente, un comportamiento, un protocolo, una norma, una forma de hacer o entender el desarrollo de actividades y el logro o alcance de resultados. En el desarrollo de la presente unidad a partir de una definición base para entender el concepto de modelo, se presenta una clasificación general de sus manifestaciones y se enmarca lo que será el desarrollo de las unidades futuras basadas en modelación matemática.

1. ¿Qué es un modelo?

Para el desarrollo de este curso, un buen punto de inicio puede ser entender un modelo, como lo expresa Anderson (2011): "Los modelos son representaciones de objetos o situaciones reales". (p.7). La forma en que se pueda representar dicha realidad puede ser utilizando expresiones matemáticas o no. Esto implica que para el registro de un dato se pueda hacer uso de formas abstractas o concretas, que para analizar el dato se requiere identificar cómo se relaciona en un contexto, y que en una siguiente fase se pueda obtener un nivel de comprensión sobre la realidad representada. Ahora, ¿qué es realidad? Sin hacer mayor profundización en lo filosófico de su definición, y según la Real Academia de la lengua española (2017), "la realidad es lo que es efectivo y tiene valor práctico, es la existencia real y efectiva de algo". La realidad es subjetiva y cada individuo puede asumir como verdad bajo cierto nivel de certeza lo que desea aceptar o no, la negación no acaba con la realidad, se convierte en otra forma de confirmarla. La realidad virtual, representa la realidad por medio de escenas o imágenes producidas por un sistema informático, que da la sensación de su existencia real. (RAE, 2017). Toda idea, por fantasiosa que parezca o inaceptable, al momento de ser expresada y aceptada por quienes la consideran posible, adquiere la condición de realidad y puede ser objeto de representación o modelación.

La aplicación de la IO en la organización se fundamenta sobre la capacidad para entender y representar la situación real bajo la que está ejecutándose o desarrollándose el proceso, la actividad o la tarea. El personal encargado de proponer alternativas para la solución o mejora de un proceso centra su oportunidad en la capacidad de entendimiento y representación del objeto de estudio. De acuerdo con Anderson (2011), “los modelos son representaciones de objetos o situaciones reales y pueden presentarse en varias formas” (p.37). Sin embargo, no hay que sobrevalorar o entronizar el modelado; por sí solo el modelo no es la solución, se requiere ejecutar otras actividades para determinar el mejor cauce y promover dentro de lo posible el mejor actuar.

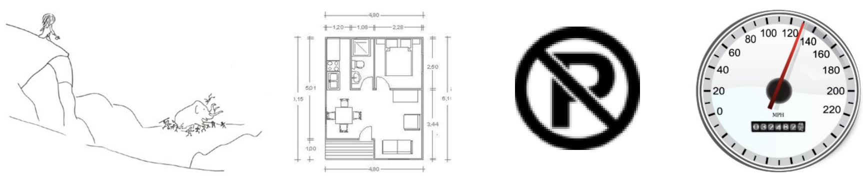
La intuición del decisor no debe ser reemplazada por el modelo, esta característica estará siempre presente en la toma de decisiones, puede ser minimizada por la identificación e inclusión en el modelo de la mayor cantidad de variables posibles; sin embargo, como lo expresa Eppen (2000), el modelo “recomienda un curso de acción para complementar (no sustituir) el uso de la intuición en la toma de decisiones” (p.4). El objetivo de representar la realidad a través de un modelo busca que “los modelos de IO están diseñados para “optimizar” un criterio objetivo específico sujeto a un conjunto de restricciones, la calidad de la solución resultante depende de la exactitud con que el modelo representa el sistema real” (Taha, 2012, p.3). La funcionalidad y capacidad de representación del modelo sobre la realidad estudiada son los elementos claves para el desarrollo de los temas a estudiar de IO en el presente documento.

2. *Tipos de modelo*

No hay un consenso en relación con una clasificación de los tipos de modelo que pueden ser utilizados en la IO. A partir de los trabajos de Eppen (2000) y Anderson (2011), se puede conformar una estructura que permita agrupar los modelos posibles reunidos por características comunes, campo de aplicación y metodología o forma de representación.

2.1. Modelos icónicos

Una realidad representada por símbolos y expresiones no matemáticas conforman la categoría de modelos icónicos (ver figura 5), donde el lenguaje de modelación o representación de la realidad utiliza expresiones y símbolos no matemáticos. Un pictograma explica la forma en la que el hombre primitivo se reunía y cazaba a un mamut, un arquitecto desarrolla su propuesta de vivienda sin necesidad de construirla físicamente, la señal universal de prohibido parquear y el velocímetro, son entre otros, ejemplos de los modelos icónicos.



a b c d

Figura 5. Tipos de modelos no matemáticos. Fuente: a. adaptado a partir de https://goo.gl/Xp3dhL. c. https://goo.gl/81ukBG. d. https://goo.gl/f41Tb5.

La representación física de una realidad mucho más grande, como lo puede ser la fuerza de sustentación en la aviación, puede darse a través de la observación o utilización de un aeromodelo o un avión de colección; estos modelos icónicos modelan la realidad y sus características se expresan totalmente a una escala donde se puede evidenciar su condición y función, sin embargo, la manipulación y cambios de las variables intervinientes y el contexto se hacen difíciles, toman tiempo para su nueva representación, aspecto que dificultad su uso.

Los modelos icónicos son los únicos concretos, característica que limita su duplicidad y aplicación a otros tipos de condición o realidad. En la tabla 1 se observa un resumen de los tipos de modelo a revisar y que serán objeto de estudio en la presente unidad.

Tabla 1

Tipos de modelo en Investigación de Operaciones

	Expresión		Reconocimiento		Manipulación		Alcance		
Tipo de modelo	Tangible	Intangible	Abstracto	Concreto	Difícil	Fácil	Único	Limitado	Amplio
Icónico	3			3	2		3		
Analógico		2	1			2		2	
Matemático		3	3			3			3

Nota. Fuente: elaboración propia

2.2. Modelos análogos

A diferencia de los icónicos, la representación en los modelos análogos es abstracta, no permite de forma simple una manipulación de la realidad y el conjunto de relaciones que representa no es obvio en su lectura, tan solo lo es en el resultado. Los modelos análogos comparten el medio físico con la realidad modelada, sin embargo, su expresión es tan diferente como sea posible en la representación del fenómeno.

Ejemplo: En casa los padres de un bebe están inquietos por que desean determinar si la temperatura del bebe está bajo los parámetros de bienestar, ellos observan que el bebé se encuentra indispuesto y sonrojado. ¿Usted puede ayudar a los padres del bebe a establecer una forma de conocer con cierto grado de certeza la temperatura del bebe?

En el ejemplo de cómo determinar la temperatura del bebé, una respuesta de amplia aceptación es la de utilizar un termómetro. ¿Se podría decir que el termómetro es un modelo?, ¿Cuál realidad está representando?

El termómetro es un ejemplo de modelo análogo, ya que busca la representación de la condición física de la temperatura en una escala definida y aceptada, donde la variación del mercurio en la escala graduada del instrumento indica el nivel de temperatura del bebé, permite observar el camino recorrido en la escala y genera una interpretación del impacto que se puede alcanzar con una variación positiva o negativa de la temperatura. Cuando la representación del modelo análogo no permite conocer ni determinar la escala graduada o el recorrido de la realidad representada, sino que su lectura es como una foto puntual del momento en que se hace su registro, recibe el nombre de *digital*, esta representación es abstracta, de fácil adaptación a los cambios y de uso limitado.

2.3. Modelos matemáticos

La forma más abstracta de representar la realidad es a través de códigos matemáticos (números y variables), de funciones y de relaciones. Un modelo matemático utiliza para la representación, los números, las variables, las operaciones y la función de relación entre estos elementos.

Ejemplo: el precio de venta de una silla es de $80 la unidad, se sabe que los costos de fabricación son de $55 la unidad, ¿cómo podría expresarse la utilidad generada por la venta de sillas?

$$U = PV(Q) - CF(Q) \tag{1}$$

Se requiere la definición de las variables utilizadas en el modelo, así:

U = utilidad por unidad vendida
PV = precio de venta por unidad
CF = costos de fabricación por unidad
Q = cantidad (unidades de sillas)

Reemplazando los valores conocidos, se tiene:

$$U = Q\,(80 - 55)$$
$$U = 25Q \qquad (2)$$

La utilidad está en función de la variable Q o cantidad de sillas.

La investigación de operaciones utiliza los modelos matemáticos para el desarrollo de sus representaciones de la realidad o modelos matemáticos. Los elementos que se requieren para estructurar un modelo matemático son las variables de decisión, la función objetivo y las restricciones o condiciones del modelo que deben partir de las condiciones presentes en la realidad a modelar.

En un proceso de identificación de los modelos matemáticos se tienen los lineales y no lineales (ver figura 6). Un modelo matemático se considera lineal cuando todas y cada una de las variables de decisión que lo conforman tiene como exponente la unidad (X_i^1); la variación de esta depende exclusivamente de la relación con su coeficiente, condición que permite que al representar gráficamente la ecuación en un plano el resultado sea una línea recta. Cuando una variable está elevada a un número distinto de la unidad su representación gráfica está formada por curvas, y se llaman modelos no lineales.

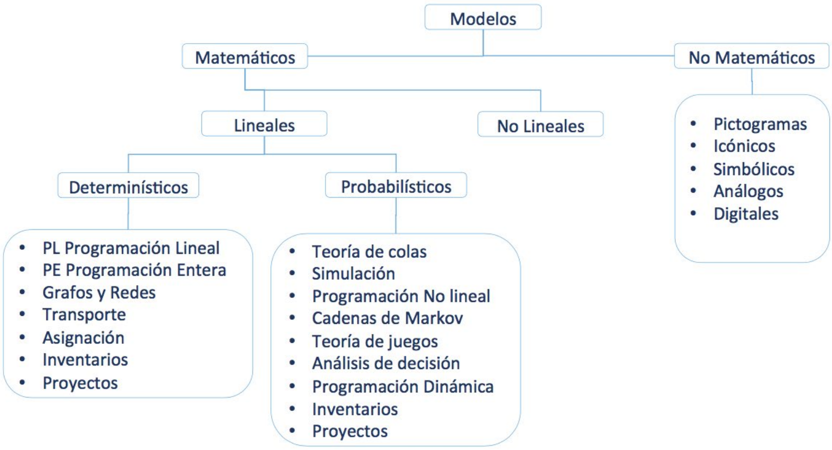


Figura 6. Propuesta de estructura general de modelos en IO. Fuente: elaboración propia.

Cuando en los modelos matemáticos lineales "es posible saber cuál es el estado de naturaleza que va a ocurrir, la toma de decisiones es bajo certidumbre" (Eppen, 2000, p. 444). La certidumbre le permite al decisor simplificar el espectro de posibilidades para la toma de decisiones; a estos modelos también se les conoce como determinísticos. Una falta de certidumbre en los eventos futuros, como indica Eppen (2000, p.445), "es lo más frecuente en el universo de los problemas administrativos" y operativos. ¿Cuánto y cómo podrían cambiar las decisiones en la empresa si se conociera por anticipado el IPC? ¿Cómo cambiarían los planes de producción si se conociera con exactitud la demanda en el mercado local? Cuando en los modelos lineales hay presencia del azar y la incertidumbre adquiere valor, el modelo se llama probabilístico.

A continuación, se presentan detalles básicos para identificar el uso de modelos determinísticos y probabilísticos en las ciencias administrativas. Un modelo de programación lineal o PL se establece cuando existe una función objetivo, se puede buscar el costo mínimo de un plan de producción o el ingreso máximo de un programa de ventas. Algunos problemas lineales exigen que los posibles resultados o rangos de respuesta a las variables del sistema sea discreto, por ejemplo, si el problema busca determinar la cantidad de casas y apartamentos que se deberían comprar para maximizar el ingreso por renta mensual de una inversión inmobiliaria, dependiente de los costos y rendimientos de cada inmueble, y condicionado a la disponibilidad de recursos, la respuesta no admite cifra decimal, solo es válida para valores enteros de las variables, este tipo de modelos se conocen como *programación entera*.

Un tipo particular de modelos hace uso de símbolos (círculos y líneas) que permiten de forma gráfica representar relaciones entre puntos llamados nodos (círculos) que son utilizados para indicar entrada o salida de flujo por medio de sus iteraciones indicadas por los arcos (líneas) donde se indica la dependencia o secuencia en el flujo dentro del grafo. (ver figura 7). A este tipo de modelos se les conoce como grafos o redes. Si el modelo de redes se utiliza para evidenciar la relación entre unos nodos de origen y unos de destino, donde en los arcos los flujos representan costos o tiempos de desplazamiento, esta adaptación tiene una especial aplicación para encontrar distribuciones óptimas en los modelos de transporte y transbordo.

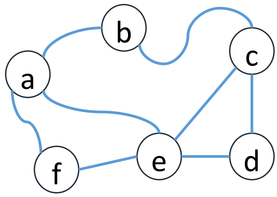


Figura 7. Estructura típica de una red. Fuente: elaboración propia.

En las organizaciones se pueden encontrar momentos o realidades donde se busca respuesta a una pregunta de cómo deben ser asignados ciertos recursos a determinados procesos con un objetivo de optimización, por ejemplo se ha evaluado que hay tres digitadores los cuales pueden ejecutar la transcripción de información de tres proyectos, cada uno con tiempos diferentes, el modelo busca determinar cuál digitador debe ejecutar la transcripción de cual proyecto con el objetivo de minimizar el tiempo total requerido para la transcripción de los proyectos, este tipo de modelación es el campo de los modelos de asignación.

Los inventarios entendidos como las cantidades de un recurso que están disponibles o dispuestos para el desarrollo de los procesos en la organización son una realidad de gran complejidad, donde hay múltiples variables en torno a las políticas de compra, mantenimiento y disposición de los recursos. Los modelos matemáticos permiten tanto en la incertidumbre como en el riesgo diseñar sistemas de ecuaciones que buscan respuestas óptimas viables para la gestión de los inventarios.

Una aplicación que ha permitido mejorar en la planeación, control y costos de los proyectos se fundamenta en el uso de modelos matemáticos que pueden ser determinísticos cunado solo utilizan un tiempo de ejecución o probabilísticos cuando se calcula un tiempo esperado a partir de la combinación de escenarios favorables y pesimistas.

Sin duda el campo de aplicación de los modelos matemáticos es amplio y sus aportes en la mejora de los procesos y resultados organizacionales ha sido fundamental. No se aborda el campo de los modelos heurísticos y meta–heurísticos los cuales brindan respuestas que no son exactas dentro del rigor matemático, sin embargo, son óptimas en el contexto de la alternativa y mejora que proponen a la realidad a través de ellos modelada.

Elementos de un modelo matemático

Los elementos que constituyen un modelo son: variables de decisión, la función objetivo y el sistema de ecuaciones restrictivas o condicionantes. La estructura base del modelo matemático lineal es la que se observa en la figura 8. Las variables de decisión son un elemento de mayor importancia, su deficiente identificación puede llevar a planteamientos erróneos y a pérdida de tiempo y recursos en el establecimiento de un modelo que no es representativo o no corresponde a la realidad estudiada.

Al incluir una función objetivo, el modelo lineal se llama Modelo de Programación lineal, donde aparecen unos elementos diferenciadores como la función objetivo y las restricciones. Estos modelos se estudiarán en la unidad 6: Programación lineal.

Todas las ecuaciones utilizadas en el modelo matemático para representar la función objetivo y las restricciones son lineales, conforman el sistema de ecuaciones por medio del cual se representa la realidad y se busca una solución óptima que cumpla con todos los requisitos establecidos. El sistema de ecuaciones en su forma base está conformado por variables de decisión, coeficientes, operaciones y relación de igualdad entre los valores del lado izquierdo y los valores del lado derecho en

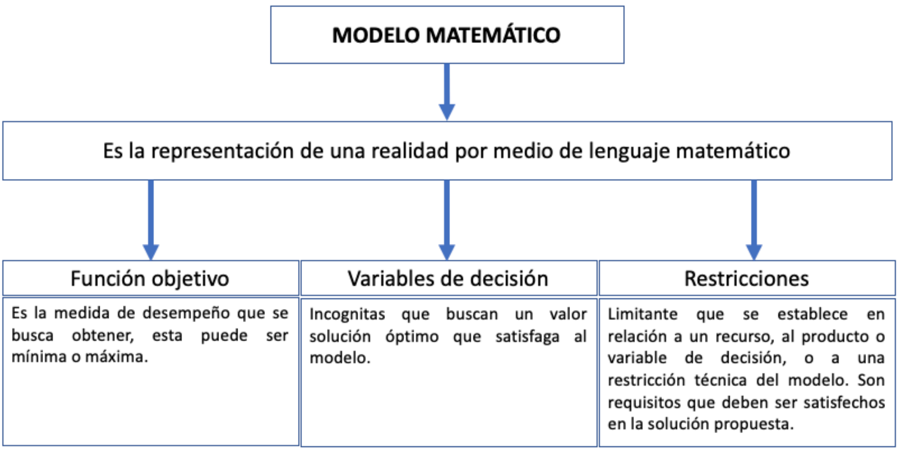


Figura 8. Elementos de un modelo matemático. Fuente: elaboración propia.

cada ecuación.

Cuando se determina una posible solución al modelo matemático, esta debe garantizar el cumplimiento de todas las condiciones definidas, permite establecer el valor de la función objetivo, la cual solo podrá ser de maximización o de minimización, no hay posibilidad de resultados mixtos o mezclados. La función objetivo es única y solo una su orientación (maximizar o minimizar) en el modelo matemático.

El término optimización se utilizará para determinar el mejor valor para la función objetivo a partir de las posibilidades validas de las variables de decisión. El mejor valor será aquel que permita obtener el máximo para cuando el objetivo se relacione con beneficios, ingresos, utilidades; o el que permita obtener el mínimo para cuando el objetivo sea direccionado por gastos, costos, tiempos, o flujo negativo.

3. *Toma de decisiones*

El proceso de la toma de decisiones establece la relación entre la situación problema, la función objetivo y las alternativas u opciones con las que se pretende dar solución. Para el interés de esta unidad, al hablar de un problema o situación problema, se interpreta problema como la diferencia entre el resultado esperado y el resultado real. De acuerdo con Taha (2012) "la definición correcta del problema es la fase más importante (y más difícil) de practicar la IO" (p. 1). Una óptima definición del problema y su contexto conducirá a una adecuada definición de variables, permitiendo la escritura de un modelo validado en su interpretación, donde cada ecuación, al seguir con rigor la definición dada a la variable, valida el requisito que generó su construcción.

Buscar la solución a un problema puede ser tan simple como complejo, sin embargo, existe un patrón de referencia respecto al procedimiento base para la búsqueda de la solución. En este paso, "el analista intenta identificar los valores de las variables de decisión que proporcionan la *mejor* salida para el modelo" (Anderson, 2011, p. 11). Cuando los valores asignados a las variables permiten optimizar la función objetivo, esta solución se llama óptima, otros puntos que satisfacen las condiciones del modelo, y dan valores no óptimos a la función objetivo, se les llama soluciones viables o factibles.

No es posible establecer una sola técnica con la que se puedan resolver todos los posibles problemas modelados, al contrario, lo amplio y particular del contexto y alternativas, determinan la complejidad del método de solución (Taha, 2004, p.5). Ejecutar un protocolo no es garantía de encontrar una solución óptima al problema estudiado, se puede recorrer el camino y llegar a un punto final donde las posibles opciones, no responden al conjunto de características y criterios establecidos, o su solución es no factible. Lo que confirma que un análisis ligero o equivocado de la realidad y su contexto, promoverá una solución que comparte estas debilidades.

Cuando se tiene un problema lo suficientemente complejo para obviar las fases previas del sentido común, donde la intuición y la solución obvia no son garantía de haber identificado la respuesta óptima, se propone el siguiente protocolo:

- Identificar y definir el problema (entender el problema)
- Establecer las posibles opciones (alternativas de solución)
- Determinar los criterios de evaluación de las opciones (criterio y escala de categoría)
- Evaluar las opciones (alternativas)
- Seleccionar e implementar la mejor alternativa de solución

Figura 9. Elementos de la toma de decisiones. Fuente: elaboración propia.

- Controlar la solución implementada y determinar el nivel de solución encontrado.

En el desarrollo de la presente unidad, la toma de decisiones inicia con la identificación de sus elementos (Figura 9) y los diferentes entornos donde puede ser aplicada.

Ejemplo: al salir de casa, usted debe tomar una decisión sobre llevar o no llevar sombrilla.

En la Figura 10 se observa la interacción y función de los elementos constitutivos de una toma de decisiones:

		Eventos posibles	
		Llueve	No llueve
Opción	Llevar sombrilla	No me mojo	Me encarto con la sombrilla
	No llevar sombrilla	Me mojo	No hay inconveniente

Figura 10. Ejemplo sobre una toma de decisión. Fuente: elaboración propia.

La celda que indica la relación entre cada opción y el evento a suceder se convierte en el resultado. Estos resultados conforman la llamada matriz de pago o de beneficios (cuando la relación es económica) y serán el objeto de optimización que persigue el modelo.

El entorno bajo el que se hace la toma de decisiones puede ser bajo certeza, cuando se conoce a plenitud y con exactitud el resultado y por lo tanto la toma de decisión será siempre la mejor a no ser que el decisor opte por una alternativa diferente que no sea la óptima y que obedezca a otra intención. Cuando se conoce la ocurrencia de los posibles eventos y se desconoce su proporción o participación la decisión se toma bajo un entorno de incertidumbre, y cuando se conoce el valor de la proporción o probabilidad de ocurrencia de un evento, el entorno de la toma de decisión se llama bajo riesgo.

La toma de decisiones, cuando estudia "el desarrollo de estrategias óptimas en que dos o más tomadores de decisiones, por lo general llamados jugadores, compiten como adversarios". (Anderson, 2011, p. 155). Una diferencia de la teoría de juegos con los modelos matemáticos de utilidad se evidencia en las opciones que tiene cada jugador, no tan solo al seleccionar su estrategia de decisión, considerando los posibles resultados de un evento aleatorio, sino al integrar en la consideración, las posibles estrategias seleccionadas por el jugador que le compite.

4. Apartado final

Los modelos son una herramienta fundamental para hacer representación de la realidad, esta condición se amplía en su capacidad con el uso del lenguaje y estructura matemática, donde por medio de lo abstracto se puede representar, analizar y ofrecer respuestas viables concretas.

Es muy amplio el campo donde los modelos matemáticos tienen participación. Las empresas manufactureras han utilizado los modelos matemáticos para dar respuestas óptimas a procesos de planeación, producción, inventarios, asignación de recursos, determinación de rutas de transporte, programación de turnos, entre otras tantas aplicaciones. No lejos las empresas de servicios cada vez utilizan con mayor propiedad los modelos matemáticos para el diseño de puntos de servicio, cálculo del número de servidores, tiempo promedio de atención y respuesta, determinación de tiempos probables en la ejecución de un proyecto y más.

A partir del entorno personal, familiar, social o laboral, se invita al estudiante a efectuar una breve exploración sobre el uso y aplicación de los modelos estudiados.

- ¿Cómo se evidencia su uso?
- ¿En qué tipo de situaciones se encuentra aplicación de los modelos?
- ¿En qué tipo de situaciones Usted observa que si se hiciera uso de modelos matemáticos las opciones y alternativas seleccionadas podrían generar mejores resultados?

Unidad 3
La línea recta

Resumen

Se ha avanzado en el estudio de modelos y en la aplicación de la matemática como base para el diseño y formulación de estos. La línea recta es fundamental en la representación gráfica que se puede hacer del modelo, y particularmente en la interpretación de la región donde se puede encontrar soluciones orientadas al óptimo posible según el contexto de evaluación. La línea recta será ahora el centro de estudio, su valor conceptual es quizás inferior al valor práctico en el desarrollo de los modelos que sobre ella se soportan, sin embargo, no son dos condiciones excluyentes, por el contrario, su complementariedad agrega valor en la búsqueda de soluciones integradoras de lo teórico y la praxis de su origen.

Palabras clave: línea recta, plano, plano cartesiano, ecuación lineal, paralela, perpendicular, pendiente.

Prefacio

La geometría permite estudiar definiciones poco complejas sobre la línea recta. A partir del acercamiento teórico se estudiará la aplicación de este en un contexto propio de las organizaciones y sus procesos que busca proponer un campo de acción general y de amplia aplicación. El concepto de ecuación, y su representación gráfica, que termina ineludiblemente en el desarrollo de líneas, permitirá la interpretación de las condiciones, relaciones y región donde la solución puede obtenerse. La restricción de linealidad en las ecuaciones del modelo limita la representación, uso y manejo de estas líneas a la *línea recta* exclusivamente.

1. Definición

El estudiante en diferentes momentos antes de este curso ha estudiado la recta, y sin duda está en condición de poder definirla, "siendo la más común la que se expresa diciendo que una recta es la distancia más corta entre dos puntos" (Lehmann, 1989, p.56) definición que involucra el concepto de distancia. Otra definición dada desde la geometría y partiendo del "concepto intuitivo que se puede tener a partir del punto y el plano, dice que una recta es la unión de un número infinito de puntos que se prolongan en una misma dirección y cuya trayectoria no tiene ángulos ni curvas" (Ángel, 2008). Cualquiera que sea la definición, la recta adquiere sentido e interpretación al poder ser ubicada en un plano, que la contenga y la haga visible en el espacio.

2. Plano cartesiano

El plano se construye de acuerdo con Lagos (2006) "al intersectar dos rectas numéricas perpendiculares, llamadas ejes de coordenadas, que se cortan en el centro de ambas para formar ahí el origen (ceros)" (p.53). La línea o eje horizontal representa la variable independiente, también llamada abscisa, donde los valores a la derecha del cero son positivos y a la izquierda negativos (ver figura 11). El eje o línea vertical representa a la variable dependiente, llamada también ordenada, siendo positivos los valores que están sobre el cero y negativos los que se encuentran por debajo (Lagos, 2006).

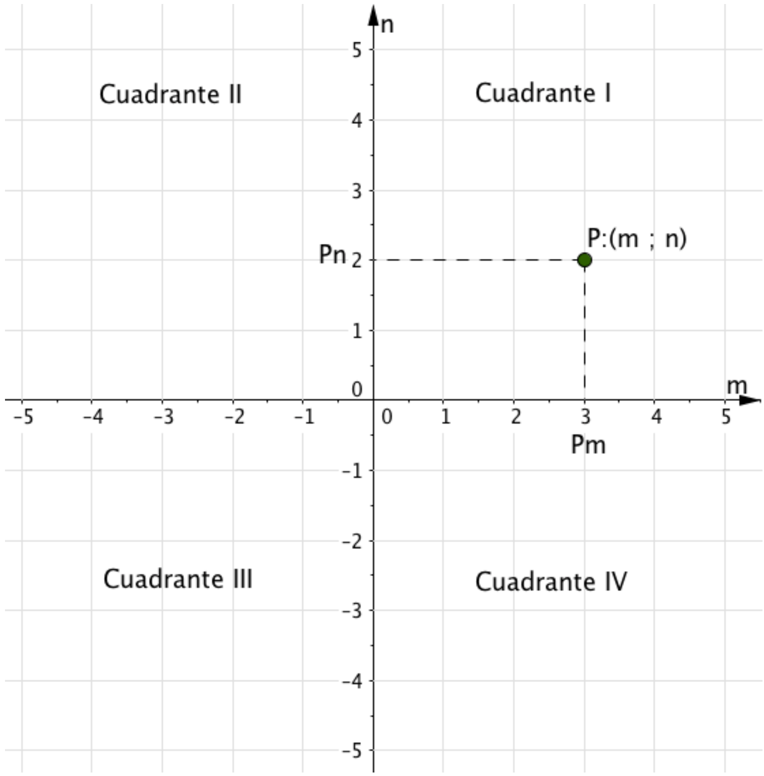


Figura 11. Representación de un punto en el plano. Fuente: elaboración propia.

"Los ejes coordenados de este plano lo dividen en cuatro regiones llamadas cuadrantes" (Thomas, 2006, p.9), siendo el cuadrante I el único donde los números del punto todos son positivos:

La representación del punto en el plano cartesiano determina su ubicación, la misma está dada por las coordenadas que lo conforman espacialmente y que al ser establecidas con referencia a un eje (valor asignado a una variable) conforman el criterio de ubicación o localización. Thomas (2006) indica que, si P es cualquier punto en el plano, y puede ser localizado por un par ordenado de números reales con valores exactos a los que se asignan las coordenadas *m* y *n* (ver figura 11), este punto espacialmente está ubicado y frecuentemente se identifica como P (*m*; *n*).

Con cierta frecuencia se puede encontrar que al representar un punto por medio de sus coordenadas (puntos ordenados) la gráfica no establece con claridad el nombre de la variable (ver figura 12), en cuyo caso la costumbre asigna de manera preestablecida el nombre de *x* al eje horizontal y el de *y* al eje vertical, sin embargo se sugiere evitar este tipo de presunción y asignar los valores propios de las variables que se están estudiando, esto será obligatorio y de absoluta importancia en la aplicación de lo estudiado sobre la línea recta en los modelos matemáticos que hacen uso de ella.

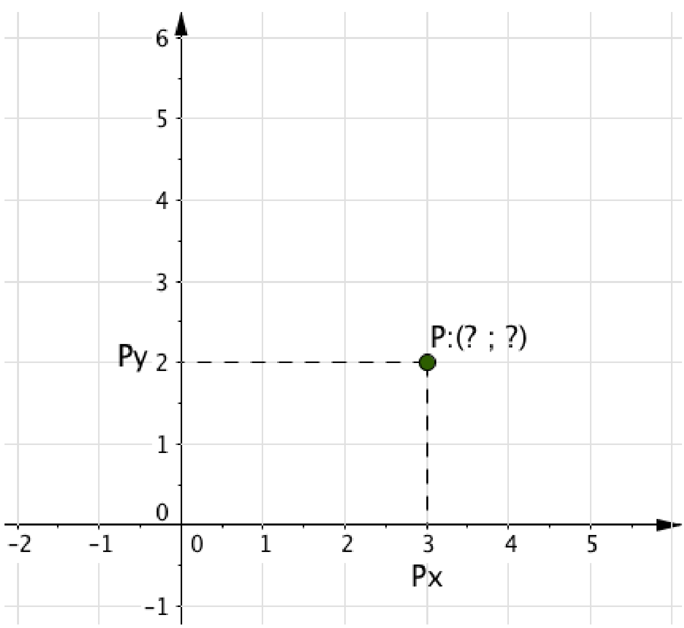


Figura 12. Representación de un punto sin nombre en los ejes. Fuente: elaboración propia.

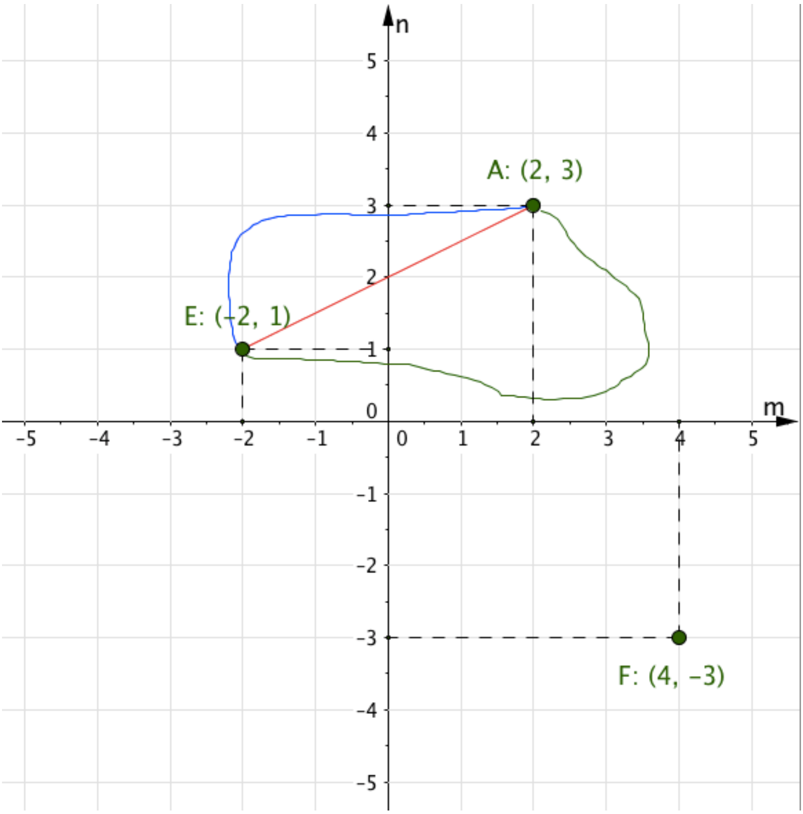


Figura 13. Representación de la unión de dos puntos por una línea recta.
Fuente: elaboración propia.

Cuando se representan varios puntos en el plano (figura 13), y se desea por ejemplo unir el punto A con el punto E, las posibilidades pueden ser infinitas, una de ellas, la que ofrece la menor distancia posible es la línea recta.

3. *Ecuación general de la recta*

La ecuación general de la recta y su ecuación complementaria para el cálculo de la pendiente (m) son

$$y = mx + b \tag{3}$$

Donde

$$m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) \tag{4}$$

Tabla 2

Definiciones base para interpretar la ecuación general de la recta

y:	Variable dependiente, ordenada, eje vertical.
x:	Variable independiente, abscisa, eje horizontal.
m:	Factor de cambio de la variable independiente. Pendiente de la línea o ángulo de inclinación o separación angular de la línea respecto al eje de referencia.
b:	Constante. Valor de la variable dependiente cuando la independiente es cero, punto de corte de la línea con el eje vertical.

Nota. Elaboración propia a partir de Thomas (2006), Lehmann (1989) y Ángel (2008).

A partir de la figura 14 se presenta una interpretación de los conceptos estudiados hasta el momento, que permitan obtener la ecuación general de la recta (3) indicada al inicio del presente apartado.

3.1. *Incremento*

Cuando un objeto se mueve o cambia de posición en el plano, (en la figura 14 el objeto cambia del punto A al punto F) “los cambios netos en sus coordenadas reciben el nombre de *incrementos*” (Thomas, 2006, p. 10) el valor de este incremento se calcula por la diferencia entre la coordenada final e inicial sin importar el orden o jerarquía en la resta.

En la tabla 3 se hace un detalle de los elementos expuestos en los puntos A y F de la figura 14, donde se indica el valor como coordenada y los valores individuales en cada punto, lo que permite el cálculo del incremento para cada variable.

Tabla 3

Análisis gráfico de la ecuación general de la recta

Punto		Coordenada $(x_i; y_i)$	Valor en x (x_i)	Valor en y (y_i)
Inicio	A	(1; 2)	$x_1 = 1$	$y_1 = 2$
Fin	F	(4; 4)	$x_2 = 4$	$y_2 = 4$
Incremento en x (Δx)			$x_2 - x_1 = 4 - 1 = 3$	
Incremento en y (Δy)				$y_2 - y_1 = 4 - 2 = 2$

Nota. Elaboración propia.

Una vez obtenidos los incrementos se puede proceder a calcular el valor de la pendiente denominada como "*m*" en la ecuación (3). Haciendo uso de la función trigonométrica tangente del ángulo α o ángulo de elevación de la recta que une al punto de inicio A con el punto final F con respecto al plano de referencia establecido en el eje horizontal, a partir de la ecuación (4), el cálculo es el siguiente.

$$Tg(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{4-2}{4-1} \Rightarrow m = \frac{2}{3} \tag{5}$$

Despejando el valor de *m* en la ecuación (3), se obtiene una ecuación parcial de la recta que une los puntos A y F

$$y = mx + b \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + b \tag{6}$$

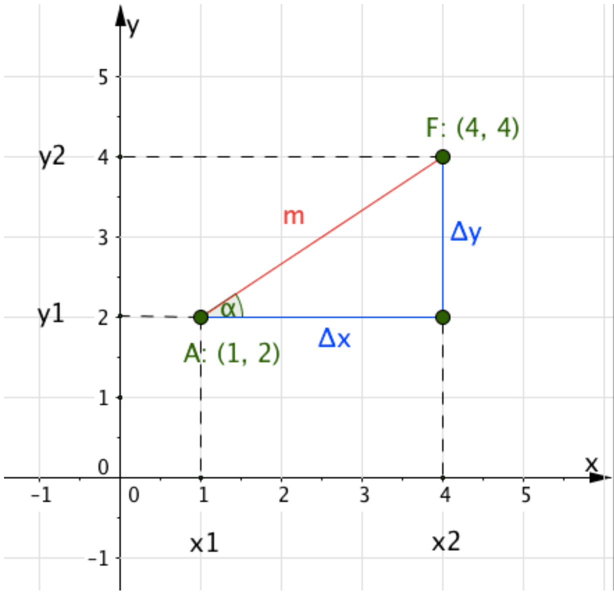


Figura 14. Análisis gráfico de la ecuación general de la recta. Fuente: elaboración propia.

El objetivo ahora está en determinar el valor para *b*. Esto se puede hacer a partir de cualquiera de los puntos A o F. Al tomar como referencia el punto A (1; 2) (donde y=2 y x=1) y despejando estos valores en la ecuación (6), se obtiene:

$$y = mx + b \;\Rightarrow\; 2 = \frac{2}{3}1 + b \;\Rightarrow\; 2 - \frac{2}{3} = b \;\Rightarrow\; b = \frac{4}{3} \qquad (7)$$

Si el despeje se hace a partir del punto F (4; 4) (donde y=4 y x=4), se obtiene:

$$y = mx + b \;\Rightarrow\; 4 = \frac{2}{3}4 + b \;\Rightarrow\; 4 - \frac{8}{3} = b \;\Rightarrow\; b = \frac{4}{3} \qquad (8)$$

Los valores obtenidos en las ecuaciones (7) y (8) son idénticos, lo que permite comprobar que el valor para *b* se puede obtener a partir de cualquiera de los puntos que conforman la recta. El paso final es reemplazar *b* en la ecuación general de la recta presentada en la ecuación (3) para obtener la ecuación de la línea recta que permite unir los puntos A y F.

$$y = mx + b \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \tag{9}$$

Un procedimiento que se sugiere es el de comprobar si la ecuación obtenida corresponde a los puntos analizados. Esto se hace reemplazando en la ecuación el valor de cualquiera de las variables de un punto y determinando el valor para la otra variable, que debe coincidir con la coordenada del punto original. Para comprobar a partir del punto F (4; 4) se reemplaza el valor de la variable independiente *x*, se obtiene para *y* el siguiente valor:

$$y = mx + b \Rightarrow y = \frac{2}{3}4 + \frac{4}{3} \Rightarrow y = 4 \tag{10}$$

El valor de *y* corresponde a la coordenada del punto F (4; 4) lo que indica que la ecuación (9) calculada es correcta. Si al evaluar uno cualquiera de los puntos que conforman la recta a partir de los valores de una variable por medio de la ecuación

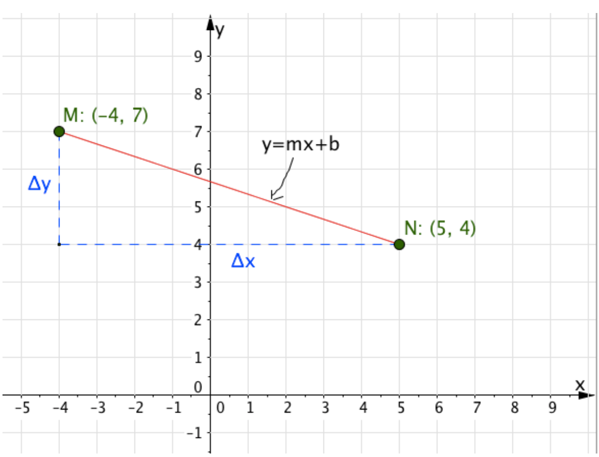


Figura 15. Gráfica cálculo de la recta ejemplo a. Fuente: elaboración propia.

determinada, no se cumple con los valores correspondientes para la otra variable, la ecuación obtenida no es válida.

3.2. *Ejemplo a*

Determinar la ecuación de la recta que una los puntos M (–4; 7) y N (5; 4)

- Graficar los puntos en un plano cartesiano (figura 15).
- Seleccionar uno cualquiera de los puntos como origen para asignar los valores $(x_1; y_1)$, consecuentemente el otro punto será el destino y tomará los valores $(x_2; y_2)$.
- En este ejemplo se tomará como punto inicial M (–4; 7), se sugiere que el estudiante resuelva el ejercicio tomando como inicio el punto N (5; 4).
- Calcular la pendiente a partir de la ecuación (4):

$$m = \frac{7-4}{-4-5} \Rightarrow m = \frac{3}{-9} \Rightarrow m = -\frac{1}{3} \tag{11}$$

- Obtener la ecuación parcial de la línea recta, reemplazando el valor calculado de m en la ecuación (11), en la ecuación general (3).

$$y = -\frac{1}{3}x + b \tag{12}$$

- A partir de la ecuación (12), calcular el valor de *b*, a partir de cualquiera de los puntos M; N. Se reemplazan los valores respectivos de las variables del punto N (5; 4)

$$4 = -\frac{1}{3}5 + b \Rightarrow b = \frac{17}{3} \tag{13}$$

- Calculados los valores para *m* y para *b*, se procede a escribir la ecuación general de la línea recta que une los puntos M y N

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{17}{3} \qquad (12)$$

- El paso siguiente es validar si la ecuación obtenida, satisface las condiciones de ca2da punto establecido para el cálculo de la línea recta.

	$P_i: (x_i; y_i)$	
Punto Coordenada	M (–4; 7)	N:(5; 4)
x	–4	5
y	$y = -\frac{1}{3}(-4) + \frac{17}{3} \Rightarrow y = 7$	$y = -\frac{1}{3}(5) + \frac{17}{3} \Rightarrow y = 4$

- La ecuación obtenida (12) satisface las condiciones de las variables en los puntos referidos (M; N), por lo tanto, es válida.

3.3. *Ejemplo b*

Determinar las ecuaciones que permitan graficar el triángulo formado por los puntos O; P; Q indicados en el plano cartesiano de la figura 16.

- Identificar las coordenadas para cada punto en el plano:

O (–4; 3); P (2; 8) y Q (6; 3)

La coordenada siempre indica en su primer valor la variable del eje horizontal o variable independiente, el segundo valor indica la variable dependiente representada en el eje vertical.

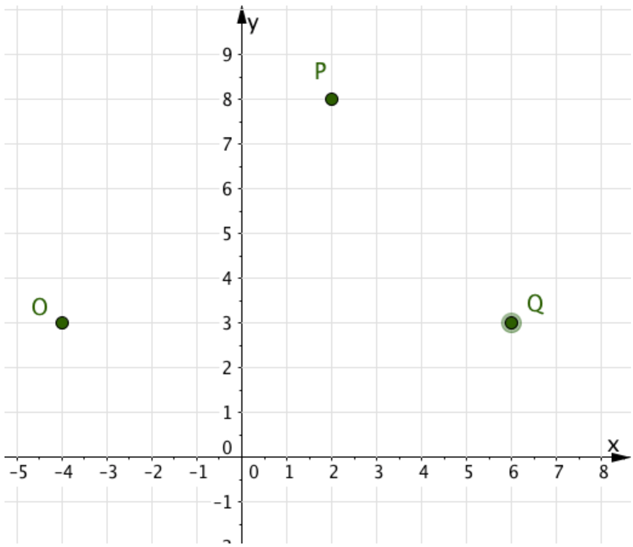


Figura 16. Gráfica ejemplo b línea recta. Fuente: elaboración propia.

- Calcular la ecuación de la recta que une los puntos $\overline{OP}$ seleccionando uno de los puntos como inicio (x_1; y_1), el otro punto será (x_2; y_2). Para este ejemplo el punto de inicio seleccionado es O (–4; 3). Utilizando la ecuación (4)

$$m = \frac{8-3}{2-(-4)} \Rightarrow m = \frac{5}{6} \tag{13}$$

- Obtener la ecuación parcial de la línea recta reemplazando el valor calculado de *m* en la ecuación (13). Reemplazando en la ecuación general (3)

$$y = \frac{5}{6}x + b \tag{14}$$

- Calcular el valor de *b*, a partir de cualquiera de los puntos $\overline{OP}$. Reemplazar en la ecuación (14) los valores respectivos de las variables en el punto O (–4; 3) (donde *x*=–4 y *y*=3)

$$3 = \frac{5}{6}(-4) + b \Rightarrow b = \frac{19}{3} \tag{15}$$

Se sugiere al estudiante calcular el valor de *b* a partir del punto P (2; 8)

- Calculados los valores para *m* y para *b*, se procede a escribir la ecuación general de la línea recta que une los puntos O y P

$$y = \frac{5}{6}x + \frac{19}{3} \tag{16}$$

- El paso siguiente es validar si la ecuación obtenida, satisface las condiciones de cada punto establecido para el cálculo de la línea recta.

	$P_i: (x_i; y_i)$	
Punto Coordenada	O (–4; 3)	P (2; 8)
x	–4	2
y	$y = \frac{5}{6}(-4) + \frac{19}{3} \Rightarrow y = 3$	$y = \frac{5}{6}(2) + \frac{19}{3} \Rightarrow y = 8$

- La ecuación obtenida (16) satisface las condiciones de las variables en los puntos referidos (O; P), por lo tanto, es válida.

- Encontrada la ecuación que une un par de puntos, se procede a calcular la ecuación de la recta que une los puntos $\overline{PQ}$, el punto de inicio será P (2; 8). Utilizando la ecuación (4)

$$m = \frac{3-8}{6-2} \Rightarrow m = \frac{-5}{4} \tag{17}$$

- Obtener la ecuación parcial de la línea recta reemplazando el valor calculado de *m* en la ecuación (17). Reemplazando en la ecuación general (3)

$$y = \frac{-5}{4}x + b \tag{18}$$

- Calcular el valor de *b*, a partir de cualquiera de los puntos $\overline{PQ}$. Reemplazar en la ecuación (18) los valores respectivos de las variables del punto P (2; 8)

$$8 = \frac{-5}{4}(2) + b \;\Rightarrow\; b = \frac{21}{2} \tag{19}$$

Se sugiere al estudiante, calcular el valor de *b* a partir del punto Q (6; 3)

- Calculados los valores para *m* y para *b*, se procede a escribir la ecuación general de la línea recta que une los puntos P y Q reemplazando en la ecuación (3)

$$y = \frac{-5}{4}x + \frac{21}{2} \tag{20}$$

- El paso siguiente es validar si la ecuación obtenida, satisface las condiciones de cada punto establecido para el cálculo de la línea recta

	$P_i: (x_i; y_i)$	
Punto Coordenada	P (2; 8)	Q (6; 3)
x	2	6
y	$y = \frac{-5}{4}(2) + \frac{21}{2} \Rightarrow y = 8$	$y = \frac{-5}{4}(6) + \frac{21}{2} \Rightarrow y = 3$

- La ecuación obtenida (20) satisface las condiciones en el punto (P; Q) para las variables definidas en el sistema, por lo tanto, es válida.

- El siguiente paso está en calcular la ecuación de la línea recta que une los puntos $\overline{OQ}$. El punto de inicio será Q (6; 3). Reemplazando en la ecuación (4)

$$m = \frac{3-3}{6-(-4)} \;\Rightarrow\; m = \frac{0}{10} \;\Rightarrow\; m = 0 \tag{21}$$

- Obtener la ecuación parcial de la línea recta reemplazando el valor calculado de *m* en la ecuación (21). Reemplazando en la ecuación general (3)

$$y = (0)x + b \tag{22}$$

- Calcular el valor de *b*, a partir de cualquiera de los puntos $\overline{OQ}$. Reemplazar en la ecuación (22) los valores respectivos de las variables del punto Q (6; 3)

$$3 = (0)6 + b \;\Rightarrow\; b = 3 \tag{23}$$

Se sugiere al estudiante, calcular el valor de *b* a partir del punto O (–4; 3)

- Calculados los valores para *m* y para *b*, se procede a escribir la ecuación general de la línea recta que une los puntos O y Q

$$y = (0)x + 3 \;\Rightarrow\; y = 3 \tag{24}$$

- Una ecuación muy particular. Cuando el valor de la pendiente (*m*) es cero, la ecuación se convierte en una constante. Para el presente ejemplo la constante está en el eje vertical (*y* en este ejemplo), valor que es independiente del valor que asuma la variable del eje horizontal (*x* en este ejemplo).

- El paso siguiente es validar si la ecuación obtenida, satisface las condiciones de cada punto establecido para el cálculo de la línea recta

	$P_i: (x_i; y_i)$	
Punto Coordenada	O (–4; 3)	Q (6; 3)
x	–4	6
y	$y = (0)(-4) + 3 \;\Rightarrow\; y = 3$	$y = (0)(6) + 3 \;\Rightarrow\; y = 3$

- La ecuación obtenida (24) satisface las condiciones de las variables en los puntos referidos (O; Q), por lo tanto, es válida.

- Al resolver las tres ecuaciones que permiten determinar las respectivas líneas rectas con las que se unen los puntos indicados en el *ejemplo b*, se puede observar la construcción resultante en la gráfica 17 donde junto a la recta o segmento (gráfica ajustada) se indica la ecuación lineal que permite su construcción.

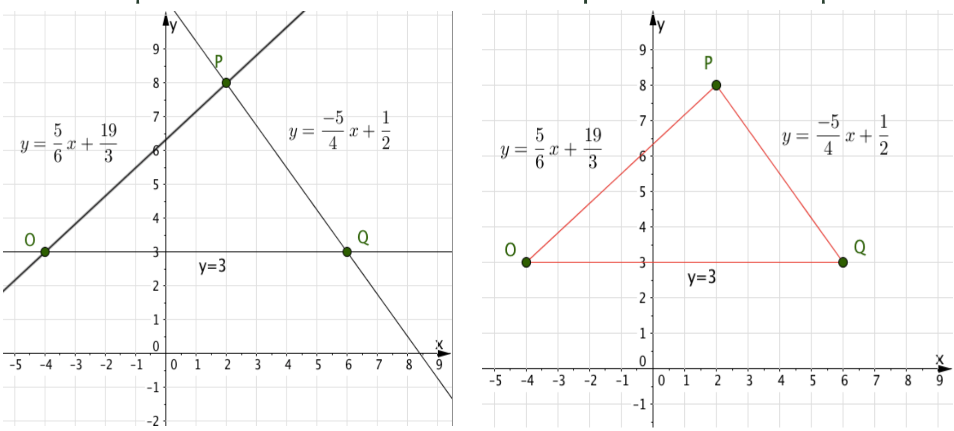


Figura 17. Solución gráfica a las ecuaciones lineales del ejemplo b. Fuente: elaboración propia.

3.4. Ejemplo c

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1; 2) y tiene una pendiente con valor de –5.

- Analizar los datos suministrados por el problema para identificar los elementos conocidos y establecer las actividades a ejecutar para determinar los faltantes que permitan resolver el problema.

- El punto (1; 2), indica en una asignación simple de variables (x_i; y_i), que hay valores de x=1; y=2 graficar el punto en el plano cartesiano no es de gran valor, por cuanto es un único punto y se requiere otro punto para establecer la relación de unión a través de una línea recta, por lo tanto, se hace uso del siguiente dato conocido que es la pendiente m=–5

- Si se conoce el valor de las coordenadas (x_i=1; yi=2) y la pendiente, se puede reemplazar en la ecuación (3) para determinar el valor de la constante b

$$2 = (-5)(1) + b \;\Rightarrow\; b = 7 \tag{25}$$

- Determinado el valor de b se determina la ecuación de la línea recta que cumple con las condiciones indicadas en el problema. Reemplazando en la ecuación (3)

$$y = -5x + 7 \tag{26}$$

- Por inspección simple se puede validar el resultado encontrado, al reemplazar cualquier de las coordenadas del punto en la ecuación (26) y calculando el valor para la otra variable.

4. Paralelas y perpendiculares

Una recta es paralela a otra cuando tiene la misma pendiente, excepto si forma un ángulo de 90º respecto al eje de referencia (Thomas, 2006) o el equivalente a decir que las rectas son paralelas si tienen el mismo ángulo de inclinación (figura 18). Una definición menos técnica para definir rectas paralelas es cuando las líneas nunca tienen punto de encuentro o contacto.

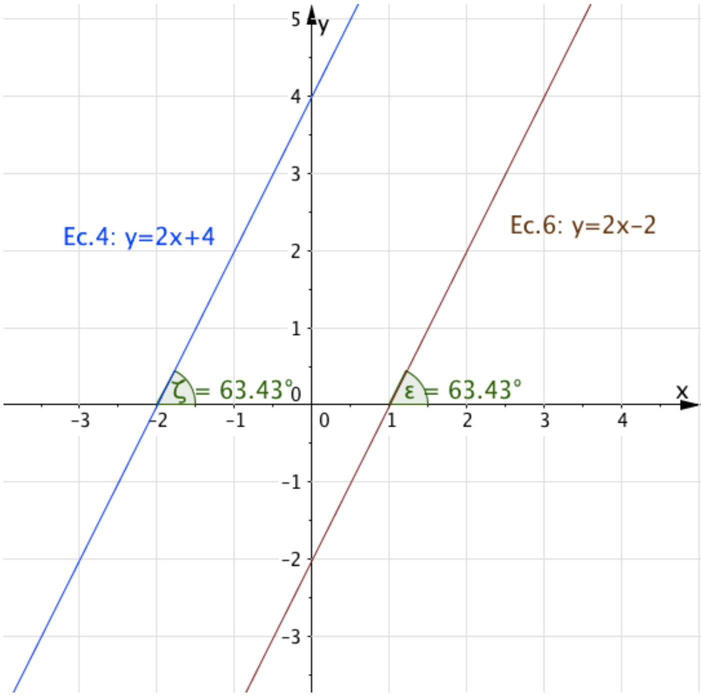


Figura 18. Rectas paralelas en un plano cartesiano. Fuente: elaboración propia.

Al observar con detalle la gráfica 18 se puede evidenciar que la única diferencia entre dos rectas que son paralelas es el valor de su constante (*b*) o punto de corte de la recta con el eje vertical, para la recta Ec.6 es –2 y para la recta Ec.4 es 4 esto permite una construcción pronta y segura de una recta paralela a una ecuación lineal, simplemente se varia el punto de corte y la línea obtenida con toda seguridad es paralela a la línea base.

De acuerdo con Ángel (2008) una recta será perpendicular a otra cuando el ángulo que formen en el cruce de las dos sea de 90º (figura 19) también llamadas rectas perpendiculares. La recta formada por la Ec.5 tiene una pendiente (m_5=–1/2)

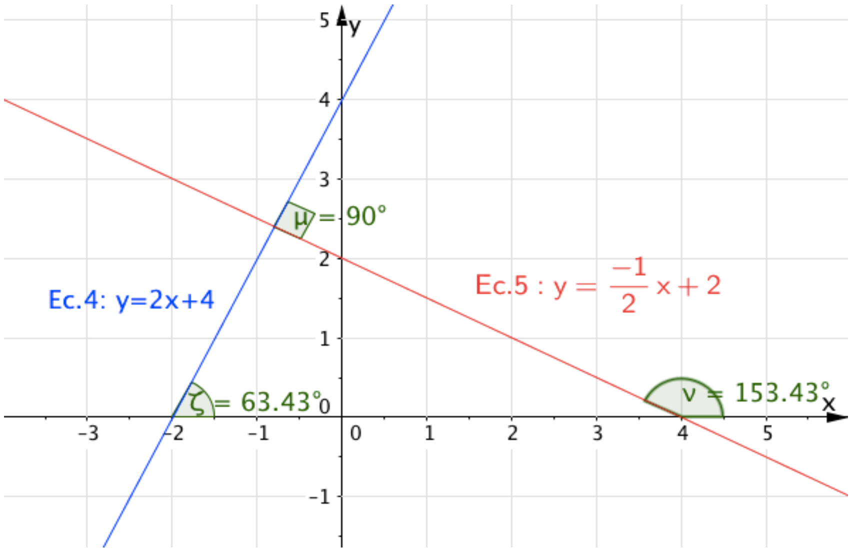


Figura 19. Graficación de rectas paralelas en el plano cartesiano. Fuente: elaboración propia.

diferente a la recta de la Ec.4 (m_4=2), esto se puede confrontar con el valor del ángulo de inclinación de cada línea respecto al eje de referencia. Una revisión del valor de las pendientes lleva a descubrir que una pendiente es la inversa negativa de la otra, o también puede indicarse que la multiplicación de las pendientes de las dos rectas es menos uno ($m_4 * m_5 = -1$)

$$m_4 = -\frac{1}{m_5}\ ;\ m_5 = -\frac{1}{m_4}\ ;\ m_4 m_5 = -1 \qquad (27)$$

Al comprobar reemplazando en la ecuación (27) los valores de las pendientes de las rectas graficadas en la figura 19 se comprueba lo indicado para cada una de las expresiones. Analizando los resultados obtenidos en las ecuaciones (28) se puede concluir que las rectas son perpendiculares.

$$m_4 = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow m_4 = 2\ ;\ m_5 = -\frac{1}{2}\ ;$$

$$m_4 m_5 = (2)(-\tfrac{1}{2}) \Rightarrow m_4 m_5 = -1 \qquad (28)$$

Ejemplo c: graficar cada una de las ecuaciones lineales que se indican a continuación haciendo uso de un plano cartesiano.

Ec. #	Ecuación ax+by=c	Ecuación y=mx+b
1	2x+y=6	y=–2x+6
2	2x+y=3	y=–2x+3
3	y+2x=0	y=–2x
4	–2x+y=–2	y=2x–2
5	$-\frac{1}{2}x+y=4$	$y=\frac{1}{2}x+4$

Antes de proceder a desarrollar el ejemplo, se sugiere hacer una revisión sobre las dos formas posibles que se utilizan en estas notas para escribir una ecuación lineal: a) la forma *ax+by=c* b) la forma *y=mx+b*. La información de la ecuación es idéntica sin importar la forma como se escriba la ecuación, su valor radica en la forma como el estudiante reconozca y comprenda la información en cada modo.

En una escritura genérica de la ecuación donde las variables se representan con x; y, los coeficientes de estas se representan con las letras a y b, y el término independiente o constante con la letra c.

Tabla 4

Modos para escritura de ecuaciones lineales

Elemento	Modo de escritura	
	Ecuación ax+by=c	Ecuación y=mx+b
Variable independiente	No esta explicita (x; y)	x
Variable dependiente	No esta explicita (x; y)	y
Pendiente	No esta explicita	m
Coeficiente	a; b	*
Término independiente	C	b

Nota. Elaboración propia. Al indicar que una variable no está explicita es porque al representar cada variable, esta puede utilizar cualquier eje. De forma tradicionalista se ha asumido tal como se expuso anteriormente que el eje horizontal es el de la variable x, lo cual puede ser modificado por el estudiante sin que esto ocasione un cambio real en el proceso de solución. El cambio que se evidencia es el de rotación de la gráfica por cuanto el punto de relación de independencia se modifica. *Al emplear este tipo de escritura, los coeficientes serán (1) para la variable dependiente y (m) para la variable independiente.

La graficación de las ecuaciones del ejemplo c se puede observar en la figura 20.

Después de graficar las ecuaciones, para cada ecuación determinar el valor de la pendiente que permita responder las siguientes preguntas:

- ¿Qué tienen en común las ecuaciones 1, 2 y 3?

Al revisar las ecuaciones se observa que la pendiente en todas es la misma (m=–2) esta información permite concluir que estas

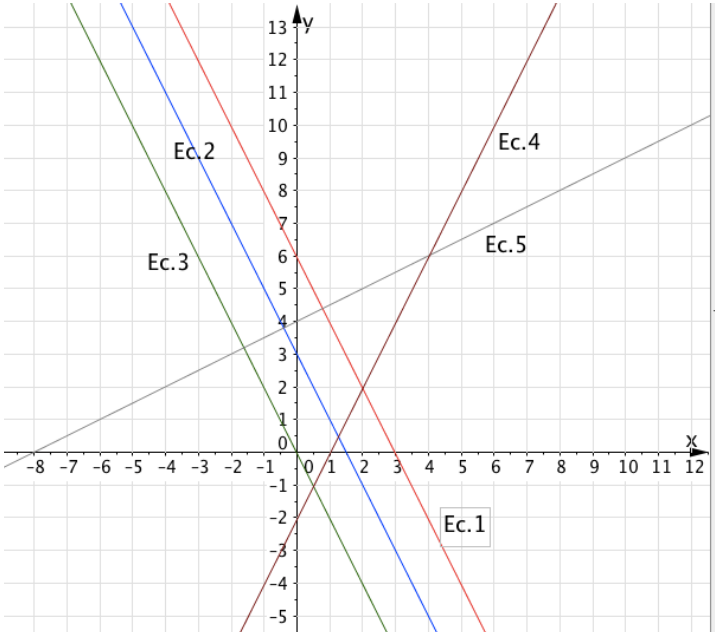


Figura 20. Graficación de ecuaciones lineales ejemplo c. Fuente: elaboración propia.

líneas son paralelas. Se recomienda al estudiante observar las ecuaciones estudiadas (1 a 3) escritas de modo y=mx+b donde se evidencia de forma directa lo indicado. La diferencia entre estas ecuaciones está en el punto de corte de cada línea con el eje vertical, Ec.1=6; Ec.2=3 y Ec.3=0 este valor también se conoce como la constante o término independiente en cada una de las ecuaciones.

Una observación a la Ec.3 (y=–2x), permite revisar al escribir de forma amplia (y=–2x+0) el rol del cero, donde este particular punto de corte se expresa generalmente como línea o recta que pasa por el origen. Una línea es paralela a otra cuando tiene la misma pendiente, si el punto de corte es el mismo, la línea será la misma, si la constante cambia, se obtiene una paralela a la línea base.

- ¿Qué tienen en común las ecuaciones 2 y 5?

Al revisar las ecuaciones se observa que cada pendiente es el inverso negativo de la otra, que su multiplicación da como resultado –1. Esto permite concluir que las rectas son perpendiculares.

$$m_2 = -2\,;\; m_5 = \tfrac{1}{2} \Rightarrow m_2 m_5 = -1 \tag{29}$$

Una línea es perpendicular a otra cuando al multiplicar sus pendientes el resultado es –1. O una línea es perpendicular a otra cuando la pendiente de la segunda línea es el inverso negativo de la pendiente de la primera línea.

$$m_2 = -\frac{1}{m_5} \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow m_2 = -2 \tag{30}$$

Se sugiere al estudiante la comprobación para m_5 a partir del inverso negativo de m_2

- ¿Qué tienen en común las ecuaciones 4 y 1?

Al revisar las ecuaciones respecto al valor de sus pendientes

- Ecuación 4: $y=2x-2$ $\quad m_4=2$
- Ecuación 1: $y=-2x+6$ $\quad m_1=-2$

Las pendientes son diferentes, lo que significa que las líneas *no son paralelas* y la multiplicación de las pendientes no es –1, lo que significa que las líneas *no son perpendiculares*. Se puede concluir que las rectas no están relacionadas bajo los criterios de paralelismo y perpendicularidad.

5. Apartado final

En esta unidad se estudió la recta, la forma como se determina la ecuación que permite reconocerla y graficarla en un plano cartesiano. Se estudiaron sus elementos estructurales, el significado y sentido de cada uno de ellos, el concepto de pendiente y su relación en la construcción de líneas paralelas y perpendiculares.

Ejercicios propuestos

1. Para cada uno de los siguientes ejercicios, encuentre la ecuación de la recta, dados los siguientes datos
   a. Pasa por (2; –2) con pendiente –0,5
   b. Pasa por (4; 3) y (3; 1)
   c. Pasa por (–2; –2) con pendiente cero

2. Para cada una de las siguientes ecuaciones: a) Grafique, b) Determine el valor de su pendiente y c) escriba una ecuación que permita construir una recta paralela y una perpendicular.

a. $3x+y=-8$

b. $\frac{1}{4}z + \frac{2}{3}m + 5 = 0$

3. Un agricultor desea cercar un área de terreno para una explotación pecuaria, determina un punto origen, instala cuatro mojones. El primero lo instala desplazándose desde el origen 3 km al norte y 4 km al oeste, a partir de este punto recorre 7 km al sur y 5 km hacia el este donde instala el segundo mojón; para el siguiente mojón el agricultor recorre desde este punto 7 km hacia el este y 2 km hacia el norte; el último mojón lo instala luego de caminar 5 km hacia el oeste y 8 km hacia el norte desde el tercer mojón. Responda a las siguientes preguntas:
   a. ¿El terreno es cuadrado?
   b. ¿El terreno tiene fronteras paralelas o perpendiculares?
   c. ¿Cuál es la ecuación de la línea recta que permita unir cada mojón que conforma el perímetro del terreno?

Unidad 4
Ecuaciones lineales

Resumen

Las ecuaciones lineales son expresiones relevantes dentro de la investigación de operaciones, por medio de estas se puede modelar un estado, evento o realidad a estudiar, como se estudio en la unidad 2, a partir de las ecuaciones se construye el modelo matemático al que se desea establecer solución. Las ecuaciones son parte del algebra el cual a su vez es la rama matemática que estudia la cantidad considerada del modo más general posible. (Baldor, 1981) Se debe aclara que las ecuaciones no son variables sino que son dos expresiones igualadas (Khan, 2013) por lo tanto se debe empezar a comprender su significado literal para así empezar a resolverse matemáticamente, pues las ecuaciones pueden ser resueltas por diferentes métodos los cuales deben estudiarse cuál es el que más conviene para su resolución, de esta manera es que este documento presenta a grandes rasgos y de manera fácil como pueden utilizarse y resolverse las ecuaciones por diferentes métodos.

Palabras clave: ecuación, ecuación lineal, variables, método de igualación, método de sustitución, método de reducción.

Prefacio

En el siguiente documento se encontrarán los aspectos relevantes de las ecuaciones terminología y algunos ejercicios que puedan aportar a la comprensión de esta temática en cualquier lector además siendo herramienta de estudio para quien se interese en el contenido. Así entonces las ecuaciones podrán ser entendidas por sus diferentes métodos de resolución y aquí destacaremos los más importantes o más usados que en la investigación de operaciones básicas se utilizará.

1. ¿Cuándo una ecuación es lineal?

En la ecuación (3) se pueden identificar los elementos que constituyen una ecuación y los criterios que hacen que la misma sea lineal. La ecuación está formada por variables, representadas por letras, que normalmente van individuales sin que esto sea regla, una variable puede ser denominada de cualquier forma, siempre y cuando corresponda a la forma como se define o declara en el sistema (ver ejemplo).

Ejemplo: un niño compró 3 naranjas y dos mangos por $500, se desea saber el precio de cada fruta. Al escribir por medio de una ecuación el evento, lo primero es definir o declarar las variables.

$$x = \text{precio de cada naranja comprada}$$
$$y = \text{precio de cada mango comprado}$$
$$3x+2y=500$$

La anterior es la escritura tradicional que se hace de las ecuaciones asumiendo valores normalizados de x; y para escribir el sistema que representa al evento. Ahora esta definición puede hacerse por medio de cualquier letra o conjunto de letras que den claridad sobre el significado de la variable:

$$naranja = \text{precio de cada naranja compradas}$$
$$mango = \text{precio de cada mango comprado}$$

$$3naranja + 2mango = 500$$

El estudiante seleccionará a conveniencia la manera como desee llamar a cada variable dentro del sistema de ecuaciones, declarando explícitamente el significado de cada una de ellas.

A partir de la expresión observada en la ecuación (31), donde si no hay ningún tipo de declaración se podría interpretar de varias formas: a) variables x; y, coeficientes a; b, término independiente z. b) variables a; b, coeficientes x; y, término independiente z.

$$ax + by = z \tag{31}$$

Una expresión general para la ecuación lineal puede ser:

$$a_1x_1 + ... + a_nx_n = b$$

Donde "x_i" representa las variables y "a_i" los coeficientes, siendo b el término independiente o el número que no tiene relación con ninguna variable (Merino y Santos, 2006). En la representación matemática de eventos o sucesos, se pueden establecer ecuaciones cuyas variables estén elevadas a un número diferente de 1 (ver figura 21), las cuales gráficamente tienen diferencias con las variables cuyo exponente sea uno.

Ejemplo: Las ecuaciones

$$\begin{gathered} 3x + 2y = 9 \\ 3x^2 + 2y = 9 \end{gathered} \tag{32}$$

Cuando las variables x; y tienen como exponente uno, la línea obtenida es una recta (figura 21). Al cambiar uno cualquiera de los exponentes, en este caso el cambio se dio en la variable x cuyo exponente es dos, el resultado es una línea no recta, significativamente diferente de la primera línea graficada.

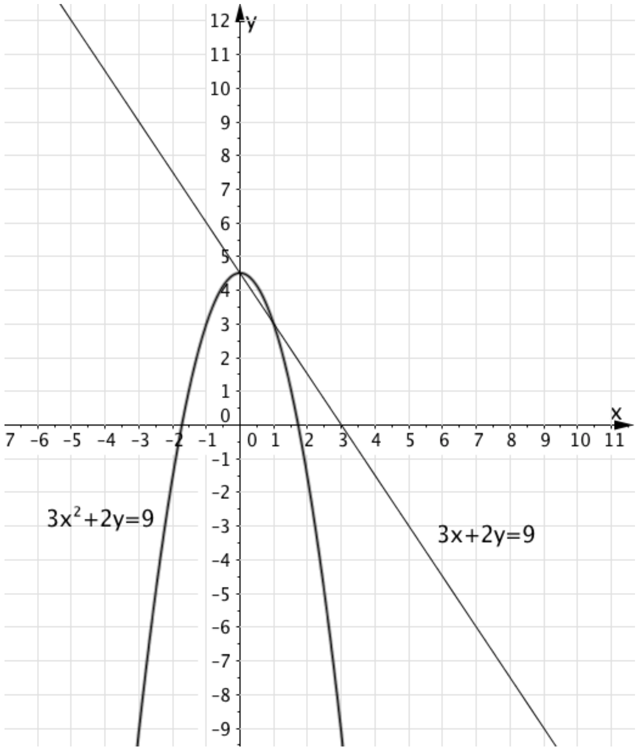


Figura 21. Graficación de ecuaciones lineales y no lineales. Fuente: elaboración propia.

Al utilizar lenguaje matemático se puede definir según Khan (2013) "la ecuación es una igualdad en la que están presentes términos conocidos y algunos desconocidos donde un término es numérico siendo el coeficiente, y el otro término toma el valor de incógnita o variable". La ecuación representada una igualdad entre la expresión del lado izquierdo y la del lado derecho, esto se indica haciendo uso del igual (matemática 7, 2010). Otra definición que se puede utilizar para ecuación es la que da Ruiz y Gil (1999), "la cual se determina como la enunciación matemática de que una expresión es igual a otra, es decir dos cantidades unidas por un signo igual, estas ecuaciones algebraicas contienen cantidades indeterminadas o variables".

2. ¿Qué es una variable?

Las variables están representadas por letras que por lo general son las últimas tres letras del alfabeto: x, y, z. Es la cantidad que se suele denotar por una letra en las ecuaciones algebraicas y que puede tomar un valor cualquiera dentro de un intervalo de valores posibles (Ruiz y Gil, 1999).

3. Ecuaciones lineales

En un sistema o conjunto de ecuaciones que tienen más de una incógnita. Las incógnitas aparecen en varias de las ecuaciones, pero no necesariamente en todas. Lo que hacen estas ecuaciones es relacionar las incógnitas entre sí. Un problema fundamental que aparece en matemáticas y en otras ciencias es el análisis y resolución de m ecuaciones algebraicas con n incógnitas. Usted ha estudiado diferentes métodos algebraicos para el desarrollo y resolución de estos sistemas de ecuaciones, entre los que están igualación, reducción, sustitución, determinantes y matrices.

A partir del siguiente sistema de ecuaciones lineales se explicarán los diferentes métodos:

$$\begin{aligned} \text{Ec.1: } & 7x + 4y = 13 \\ \text{Ec.2: } & 5x - 2y = 19 \end{aligned} \tag{33}$$

3.1. Método de igualación

Este método busca igualar las dos ecuaciones en torno a una variable común, la variable seleccionada puede ser cualquiera de las que conforman el sistema, para este ejercicio se igualara a partir de la variable "x", el sistema queda expresado al igualar las ecuaciones 1 y 2 por tener un valor común en x, se tiene:

$$Ec.1: x = \frac{13 - 4y}{7}$$

$$Ec.2: x = \frac{19 + 2y}{5}$$

Se despeja el valor de la variable y, obteniendo como resultado

<table>
<tr><td rowspan="5">$\frac{13 - 4y}{7} = \frac{19 + 2y}{5}$</td><td>5(13 – 4y) = 7(19 – 2y)</td><td>Resolver los paréntesis.</td></tr>
<tr><td>65 – 20y = 133 + 14y</td><td>Agrupar variables y términos independientes.</td></tr>
<tr><td>–20y – 14y = 133 – 65</td><td rowspan="3">Despejar la variable *y*.</td></tr>
<tr><td>– 34y = 68</td></tr>
<tr><td>y = –2</td></tr>
</table>

Para determinar el valor de la variable "x" se procede a sustituir el valor encontrado de "y" en cualquiera de las ecuaciones que forman el sistema, para este ejemplo se reemplazará en la Ec.2

$$\text{Ec.2: } 5x - 2y = 19; \text{ entonces } 5x - 2(-2) = 19; \text{ se tiene } x = 3 \quad (34)$$

Siempre se sugiere validar las respuestas obtenidas, reemplazando los valores de cada variable en cada una de las ecuaciones del sistema, se deben cumplir todas las condiciones, si una o más de las ecuaciones no se cumple, significa que los valores encontrados para las variables no son satisfactorios y debe procederse a resolver el sistema nuevamente.

<table>
<tr><td rowspan="2">Ec. 1
7x+4y=13</td><td>7(3) + 4(–2) =13</td><td rowspan="2">Ec.2
5x–2y=19</td><td>5(3) – 2(–2) =19</td></tr>
<tr><td>13=13</td><td>19=19</td></tr>
<tr><td colspan="2">Se satisface la primera ecuación.</td><td colspan="2">Se satisface la segunda ecuación.</td></tr>
</table>

3.2. *Método de reducción*

Este método busca reducir o eliminar del sistema una de las variables para permitir que el mismo que de representado en una sola variable y obtener su valor de forma directa en el despeje.

<table>
<tr><td rowspan="4">Ec.1
7x+4y=13

Ec.2
5x–2y=19</td><td>(Ec.2) * 2</td><td rowspan="3">Se busca un factor (número) por el cual operar la ecuación que permita al efectuar una suma algebraica la eliminación de una de las variables. Al multiplicar por “2” la Ec.2 se obtiene un coeficiente en “y” de “–4” que al sumarse a la Ec.1 eliminaría la variable “y”.</td></tr>
<tr><td>Ec.1 7x + 4y=13
Ec.2 10x – 4y=38</td></tr>
<tr><td>17x=51</td></tr>
<tr><td>x=3</td><td>Despejar la variable “x”.</td></tr>
</table>

Para determinar el valor de la variable “y” se procede a sustituir el valor encontrado de “x” en cualquiera de las ecuaciones que forman el sistema,

$$\text{Ec.2: } 5x - 2y = 19; \text{ entonces } 5(3) - 2(y) = 19; \text{ se tiene } y = -2 \quad (35)$$

De igual forma a lo ejecutado al final del método de igualación, se procede a validar las respuestas obtenidas en las variables en el sistema de ecuaciones.

3.3. *Método de sustitución*

Este método busca reducir o eliminar del sistema una de las variables para permitir que el mismo que de representado en una sola variable y obtener su valor de forma directa en el despeje.

<table>
<tr><td rowspan="6">Ec.1:
$7x+4y=13$

Ec.2:
$x-2y=19$</td><td>$Ec.1: x = \frac{13-4y}{7}$</td><td>Despejar cualquiera de las ecuaciones en razón a una sola variable, en este caso se despeja la ecuación 1 en torno a x.</td></tr>
<tr><td>$5\left(\frac{13-4y}{7}\right) - 2y = 19$</td><td>Reemplazar en la ecuación 2 el valor determinado para x.</td></tr>
<tr><td>$\frac{65-20y}{7} - 2y = 19$</td><td rowspan="4">Despejar la variable y.</td></tr>
<tr><td>$\frac{65}{7} - \frac{20y}{7} - 2y = 19$</td></tr>
<tr><td>$\frac{-34}{7}y = \frac{68}{7}$</td></tr>
<tr><td>$y = -2$</td></tr>
</table>

Para determinar el valor de la variable x se procede a sustituir el valor encontrado de y en cualquiera de las ecuaciones que forman el sistema, tal como se demostró en la ecuación 34. De igual forma a lo ejecutado al final del método de igualación, se procede a validar las respuestas obtenidas en las variables en el sistema de ecuaciones.

3.4. Determinantes

Una de las situaciones posibles para entender el uso de la determinante en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales es: Dada una matriz cuadrada de tamaño $m \times n$, su determinante se define como la sumatoria de los productos de sus diagonales menos el producto de la suma de sus adjuntas.

2×2:

$$B\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \rightarrow Det(B) = (a * c) - c * b$$

3×3:

$$G\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 8 & 7 & 2 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix} \rightarrow Det\ (G) = ?$$

Como se presenta en la matriz G, este sistema no tendrá solución por determinantes expresado en su forma natural, para resolverlo se deben ajustar el número de filas o de columnas que garanticen el mismo número de diagonales que de filas o columnas. Esto se logra duplicando las dos primeras filas o las dos primeras columnas, veamos ejemplos de estas situaciones:

Resolver el sistema:

$$2x + 6y = -1$$

$$x + 8y = 2$$

La determinante *Det*(*A*) será

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = (2 * 8) - (1 * 6) = 10$$

Para resolver el sistema y dar los valores a las variables se procede a establecer la determinante a partir de las matrices que lo conforman:

$2x + 6y = -1$ $x + 8y = 2$	$A\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$ Matriz de variables	$=$	$\begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix}$ Matriz de constantes

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = (2 * 8) - (1 * 6) = 10$$

$$Det(Ax) = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = (-1 * 8) - (2 * 6) = -20$$

$$Det(Ay) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (2 * 2) - (1 * -1) = 5$$

$$x = \frac{Det(Ax)}{Det(A)} = \frac{-20}{10} = -2$$

$$y = \frac{Det(Ay)}{Det(A)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

La regla de Kramer se puede generalizar para cualquier sistema de *n* ecuaciones lineales con *n* variables, siempre y cuando el determinante de la matriz de coeficientes no sea cero, el sistema se puede escribir de forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{vmatrix}$$

Y sus soluciones serán:

$$x_1 = \frac{|D_{x1}|}{|D|};\ x_2 = \frac{|D_{x2}|}{|D|};\ \dots\ x_n = \frac{|D_{xn}|}{|D|}$$

Donde D es la determinante de la matriz de coeficientes. Para calcular los valores de las variables se reemplaza la columna de la variable.

Ejemplo: resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= -1 \\ x + 6z &= 0 \\ 3x - 2y &= 5 \end{aligned}$$

Calculamos las matrices componentes

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x \\ y \\ x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{vmatrix}$$

Calculamos las determinantes

1. Determinantes del sistema:

$$Det(S) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$2*0*0=0 \qquad 3*0*4=0$$
$$-3*6*3=-54 \qquad -2*6*2=-24$$
$$4*1*-2=-8 \qquad 0*1*-3=0$$
$$\sum=-62 \qquad \sum=-24$$
$$-62-(-24)=-38$$

Det (*S*) = –38

Cálculo en Excel: –38

$$Det(X)=\begin{vmatrix}1 & -3 & 4\\ 0 & 0 & 6\\ 5 & -2 & 0\end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix}1 & -3 & 4 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0\\ 5 & -2 & 0 & 5 & -2\end{vmatrix} \rightarrow$$

$$1*0*0=0 \qquad 5*0*4=0$$
$$-3*6*5=-90 \qquad -2*6*1=-12$$
$$4*0*-2=0 \qquad 0*0*-3=0$$
$$\sum=-90 \qquad \sum=-12$$
$$-90-(-12)=-78$$

Det (*X*) = –78

Cálculo en Excel: –78

$$Det(Y)=\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & 0 & 6\\ 3 & 5 & 0\end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix}2 & 1 & 4 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 6 & 1 & 0\\ 3 & 5 & 0 & 3 & 5\end{vmatrix} \rightarrow$$

$$2*0*0=0 \qquad 3*0*4=0$$
$$1*6*3=18 \qquad 5*6*2=60$$
$$4*1*5=20 \qquad 0*1*1=0$$
$$\sum=38 \qquad \sum=60$$
$$38-60=-22$$

Det (*Y*) = –22

Cálculo en Excel: –22

$$Det(Z)=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 5\end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix}2 & -3 & 1 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 5 & 3 & -2\end{vmatrix} \rightarrow$$

$$2*0*5=0 \qquad 3*0*1=0$$
$$-3*0*3=0 \qquad -2*0*2=0$$
$$1*1*-2=-2 \qquad 5*1*-3=-15$$
$$\sum=-2 \qquad \sum=-15$$
$$-2-(-15)=13$$

Det (*Z*) = 13

Cálculo en Excel: 13

Cálculo de las variables

$$X = \frac{Det(X)}{Det(S)} = \frac{-78}{-38} = {}^{39}/_{19}$$

$$Y = \frac{Det(Y)}{Det(S)} = \frac{-22}{-38} = {}^{11}/_{19}$$

$$Z = \frac{Det(Z)}{Det(S)} = \frac{13}{-38} = {}^{-13}/_{38}$$

Comprobamos en el sistema de ecuaciones a resolver

$$\begin{array}{lll} 2x - 3y + 4z = -1 & 2({}^{39}/_{19}) - 3({}^{11}/_{19}) + 4({}^{-13}/_{38}) = -1 & -1 \\ x + 6z = 0 & 1({}^{39}/_{19}) + 6({}^{-13}/_{38}) = 0 & 0 \\ 3x - 2y = 5 & 3({}^{39}/_{19}) - 2({}^{11}/_{19}) = 5 & 5 \end{array}$$

Los valores obtenidos para las variables *X*, *Y*, *Z* satisfacen el sistema

3.5. *Matrices*

Una matriz es una tabla ordenada de escalares X_{ij} de la forma:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} Col\,1 & Col\,2 & \dots & Col\,j \end{array} \\ \begin{array}{c} Fila\,1 \\ Fila\,2 \\ \dots \\ Fila\,i \end{array} & \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1j} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{i1} & X_{i2} & & X_{ij} \end{bmatrix} \end{array}$$

Los términos horizontales son las filas de la matriz y los verticales son sus columnas. El tamaño de una matriz se denomina $m * n$ donde m representa el número de filas y n el número de columnas.

- Diagonal, es la línea imaginaria que atraviesa la matriz desde la posición X_{11} hasta la X_{ij}

$$A \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 7 & 8 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad A \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 7 & 8 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad B \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Diagonal principal   Diagonal secundaria   ¿Diagonal?

- Diagonal principal, formada por todos los elementos de la matriz X_{ij} donde i=j
- Diagonal secundaria, formada por los elementos X_{i1} hasta X_{1j}

Nota: No hay diagonales en matrices rectangulares (Ver matriz B)

3.5.1. *Tipos de matrices*

- Matriz unitaria: cuando está compuesta por una sola fila o columna de elementos.

$$A \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad B \begin{bmatrix} 2 & -9 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad C \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad K \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz columna   Matriz Fila   Matrices nulas

Cuando todos los elementos de la matriz son iguales a cero (0) la matriz se llama nula.

- Cuadrada: cuando el número de filas es igual al número de columnas (*m*=*n*)

- Rectangular: cuando el número de filas es diferente al número de columnas (m≠n).

- Triangular: en matrices cuadradas, cuando los elementos de la matriz diferentes a los de la diagonal principal son todos cero.

$$B\begin{bmatrix}3 & 2 & 5\\ 0 & 4 & 7\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad B\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 5 & 3 & 1\end{bmatrix} \qquad B\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Triangular superior   Triangular inferior   Matriz diagonal

- Identidad: en matrices cuadradas, cuando los elementos de la matriz diferentes a los de la diagonal principal son todos cero y los elementos de la diagonal principal son todos uno.

$$E\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Matriz de identidad

- Traspuesta (T); cuando se invierte la ubicación de los elementos y las filas pasan a ser las columnas en una nueva matriz esta será la traspuesta.

$$B \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f1 & f2 & f3 \end{array} \\ \begin{bmatrix}3 & 2 & 5\\ 9 & 4 & 7\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix} \end{array} \qquad B_T \begin{array}{cc} \begin{bmatrix}3 & 9 & -2\\ 2 & 4 & 0\\ 5 & 7 & 1\end{bmatrix} & \begin{array}{c} c1 \\ c2 \\ c3 \end{array} \end{array}$$

Traspuesta de B

3.5.2. Operaciones básicas con matrices

- Matrices y escalares:

$$B\begin{bmatrix}4 & 3 & 5\\ 8 & 7 & 2\\ 2 & 0 & 9\end{bmatrix} \quad B*4\begin{bmatrix}16 & 12 & 20\\ 32 & 28 & 8\\ 8 & 0 & 36\end{bmatrix} \quad B/4\begin{bmatrix}1 & 3/_4 & 5/_4\\ 2 & 7/_4 & 1/_2\\ 1/_2 & 0 & 9/_4\end{bmatrix}$$

Se opera (multiplica o divide) cada término de la matriz por el escalar definido.

- Suma, las matrices a sumar deben ser del mismo orden o tamaño. Se suman los términos por igual posición en las matrices.

$$B\begin{bmatrix}3 & 2 & 5\\ 9 & 4 & 7\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix} + D\begin{bmatrix}4 & -2 & 3\\ -8 & 7 & 2\\ 5 & 9 & -1\end{bmatrix} = B+D\begin{bmatrix}7 & 0 & 8\\ 1 & 11 & 9\\ 3 & 9 & 0\end{bmatrix}$$

$$D\begin{bmatrix}4 & -2 & 3\\ -8 & 7 & 2\\ 5 & 9 & -1\end{bmatrix} + B\begin{bmatrix}3 & 2 & 5\\ 9 & 4 & 7\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix} = D+B\begin{bmatrix}7 & 0 & 8\\ 1 & 11 & 9\\ 3 & 9 & 0\end{bmatrix}$$

La suma en matrices es conmutativa B+D = D+B.

- Resta, las matrices a restar deben ser del mismo orden o tamaño. Se restan los términos por igual posición en las matrices.

$$B\begin{bmatrix}3 & 2 & 5\\ -4 & 6 & 8\\ 9 & 4 & 7\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix} - D\begin{bmatrix}4 & -2 & 3\\ -2 & 3 & 0\\ -8 & 7 & 2\\ 5 & 9 & -1\end{bmatrix} = B-D\begin{bmatrix}-1 & 4 & 2\\ -2 & 3 & 8\\ 17 & -3 & 5\\ -7 & -9 & 2\end{bmatrix}$$

$$D\begin{bmatrix}4 & -2 & 3\\ -2 & 3 & 0\\ -8 & 7 & 2\\ 5 & 9 & -1\end{bmatrix} - B\begin{bmatrix}3 & 2 & 5\\ -4 & 6 & 8\\ 9 & 4 & 7\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix} = D-B\begin{bmatrix}1 & -4 & -2\\ 2 & -3 & -8\\ -17 & 3 & -5\\ 7 & 9 & -2\end{bmatrix}$$

La resta en matrices NO es conmutativa B–D ≠ D–B se observa de D–B = (B–D) ∗ –1

- Multiplicación de matrices. Para poder multiplicar se debe garantizar que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda, de lo contrario la multiplicación no es viable.

$$B\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -4 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 7 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad K\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad M\begin{bmatrix} 5 & 3 & -6 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4\times 3 \qquad 3\times 2 \qquad 2\times 2 \qquad 2\times 3$$

Operar B ∗ F

$$B\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -4 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 7 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad B*F\begin{bmatrix} \mathrm{f}_1c_1 & \mathrm{f}_1c_2 \\ \mathrm{f}_2c_1 & \mathrm{f}_2c_2 \\ \mathrm{f}_3c_1 & \mathrm{f}_3c_2 \\ \mathrm{f}_4c_1 & \mathrm{f}_4c_2 \end{bmatrix}$$

$$4\times 3 \qquad 3\times 2 \qquad 4\times 2$$

$$B*F\begin{bmatrix} 3*3+2*9+5*-2 & 3*5+2*7+5*1 \\ -4*3+6*9+8*-2 & -4*5+6*7+8*1 \\ 9*3+4*9+7*2 & 9*5+4*7+7*1 \\ -2*3+0*9+1*-2 & -2*5+0*7+1*1 \end{bmatrix} =$$

$$B*F\begin{bmatrix} 17 & 34 \\ 26 & 30 \\ 49 & 80 \\ -8 & -9 \end{bmatrix}$$

Operar F ∗ K y K ∗ F

$$F\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad K\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad F*K\begin{bmatrix} 15 & 2 \\ 45 & 22 \\ -10 & -10 \end{bmatrix}$$

$$3\times 2 \qquad 2\times 2 \qquad 3\times 2$$

$F * K$ es posible porque el número de columnas de la matriz F es igual al número de filas de la matriz K

$K * F$ no es posible porque el número de columnas de la matriz K es diferente al número de filas de la matriz F

- División matricial. La división entre matrices es una operación no viable, no se encuentra un espacio vectorial donde representar esta operación.

4. Apartado final

El estudio y resolución de los sistemas de ecuaciones lineales, permite el cálculo de todas y cada una de las variables que cumplen con las condiciones establecidas en el sistema. Al tener herramientas que permiten la determinación de los valores viables para cada variable el modelo puede extenderse hacia otras áreas del conocimiento y su aplicación es extensa con relación a la posibilidad de encontrar soluciones a múltiples problemas de las organizaciones donde se utilizan los sistemas lineales expresando la realidad de sus procesos.

Ejercicios propuestos

Resolver por cada uno de los métodos estudiados los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

1. $2x + 3y + z = 1$

   $3x - 2y - 4z = -3$

   $5x - y - z = 4$

2. $x + 8y - 5z = 3$

$$3x - 2y + 3z = 1$$

$$2x + 3y - 2z = 4$$

3. $$2x - y + 3z = 4$$

$$3x + 2y - z = 3$$

$$x + 3y - 4z = -1$$

Unidad 5
Inecuaciones

Resumen

Las inecuaciones son un tratamiento especial de lo estudiado en algebra con relación a la igualdad de dos expresiones representadas a lado y lado de un igual. La inecuación permite la interpretación de regiones donde se pueden tener soluciones viables a los sistemas de ecuaciones planteados, las respuestas no son exclusivamente los puntos que forman la línea, ahora esta solución se puede encontrar en una zona de mayor amplitud a la que se denomina región factible. La solución de inecuaciones y desigualdades es una herramienta muy utilizada en cálculo para determinar el dominio de una función, intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad, entre otros.

Con el método grafico se puede expandir mucho más el conocimiento y ampliar la mentalidad para dar una solución viable de una inecuación cuyos valores de una incógnita cumplen la desigualdad.

***Palabras clave**:* modelo matemático, inecuación, método gráfico, desigualdad, región factible.

Prefacio

Una inecuación permite el manejo de zonas donde los valores no forman parte de la recta generada por la ecuación lineal en el plano, esto es una gran diferencia respecto a lo estudiado en la igualdad (ecuación). Los problemas en las empresas manifiestan condiciones o restricciones que con bastante frecuencia no se rigen por condición de igualdad sino por desigualdades, como lo puede ser la disponibilidad de un recurso que al ser consumido puede ser considerado su límite como menor o igual a la cantidad disponible, y así en gran variedad de situaciones.

1. ¿Qué es una inecuación?

Es una expresión matemática que indica que lo indicado en uno de sus lados es diferente (mayor o menor) que lo indicado al otro lado. En estas expresiones se utilizan signos como los observados en la tabla 5.

2. Propiedades de las inecuaciones

Para resolver una inecuación, se necesita pasarla a otra equivalente que sea más sencilla., para ello, necesitamos repasar un par de reglas básicas:

Tabla 5

Expresiones en Inecuaciones

Mayor que	$\geq$
Menor que	$\leq$
Mayor a	$>$
Menor a	$<$

Nota. Elaboración propia. Los intervalos cerrados incluyen al límite como parte de la solución y de ahí que se entienden como mayor o menor incluido el igual; cuando el intervalo es abierto y el límite no es incluido como parte de la solución la expresión utilizada no emplea el igual y el símbolo así lo indica (solo mayor o menor).

2.1. Regla de la suma

Si a los dos miembros de una inecuación se les suma o resta un mismo número o una misma expresión algebraica, se obtiene otra inecuación equivalente.

$$4x - 3 \leq x + 3 \tag{35}$$

Si se suma o resta un mismo número, entonces

$$(4x - 3) + 10 \leq (x + 3) + 10 \qquad 4x + 7 \leq x + 13$$
$$(4x - 3) - 10 \leq (x + 3) - 10 \qquad 4x - 17 \leq x - 7$$

Las expresiones resultantes siguen siendo equivalentes a los originales y su condición de desigualdad se conserva.

2.2. Regla de la multiplicación

Si ambos miembros de la inecuación se les opera por el mismo número positivo, se mantiene su equivalencia y sentido, si se les opera por un número negativo, se cambia el sentido de la desigualdad.

$$\begin{gathered}(4x - 3) * -2 \ \leq (x + 3) * -2 \\ -8x + 6 \leq -2x - 6 \\ -8x + 2x \leq -6 - 6 \\ -6x \leq -12\end{gathered} \tag{36}$$

Al dividir por –6 o multiplicar al final la expresión reducida por –1 para dar sentido positivo a la variable, el sentido de la inecuación cambia

$$x \geq 2 \qquad\qquad -x \leq -2$$

2.3. Regla del orden

Si se cambia el orden de los miembros en la inecuación el sentido de esta cambia.

$$x \geq 2 \text{ se lee } x \text{ mayor o igual a } 2 \qquad (37)$$

$$2 \leq x \text{ se lee } 2 \text{ menor o igual a } x \qquad (37)$$

Si no se cambia el sentido se pierde la relación y el problema obtendrá otra respuesta.

3. Representación gráfica del dominio de una inecuación

Para estudiar los cambios que se dan en el manejo de inecuaciones respecto al conjunto solución, se procede a la representación gráfica de la expresión $3x \geq 9$

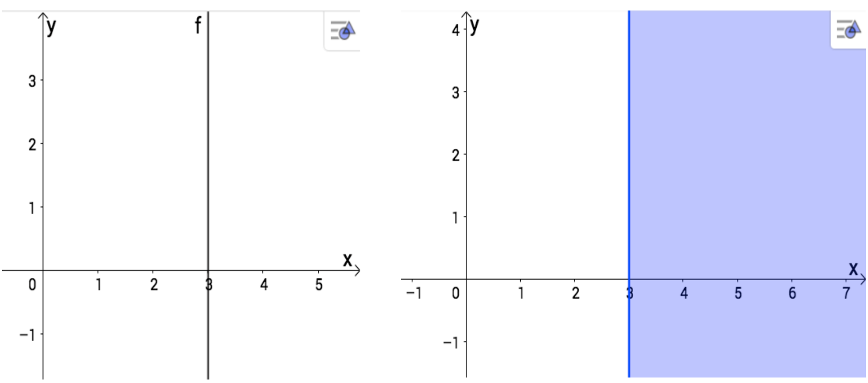


Figura 22. Representación gráfica de una inecuación. Fuente: elaboración propia.

En las figuras 22 y 23 se evidencia la diferencia fundamental entre la ecuación y la inecuación. La zona sombreada constituye la región donde cualquier punto que forme parte de ella es solución de la ecuación a diferencia de la primera gráfica donde la solución es formada únicamente por los puntos que forman la recta.

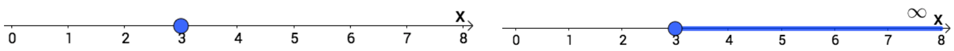
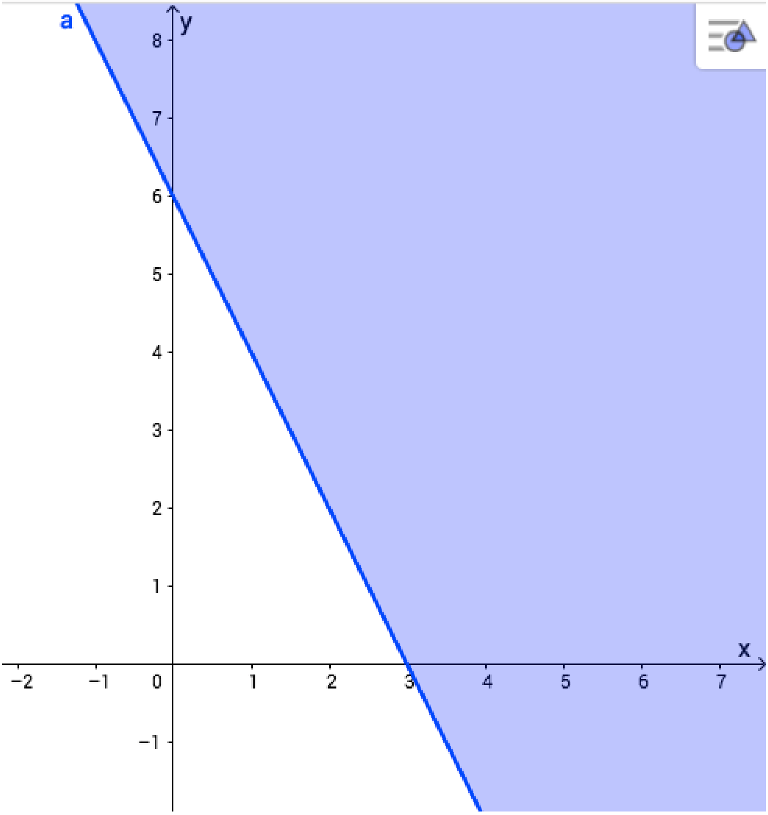


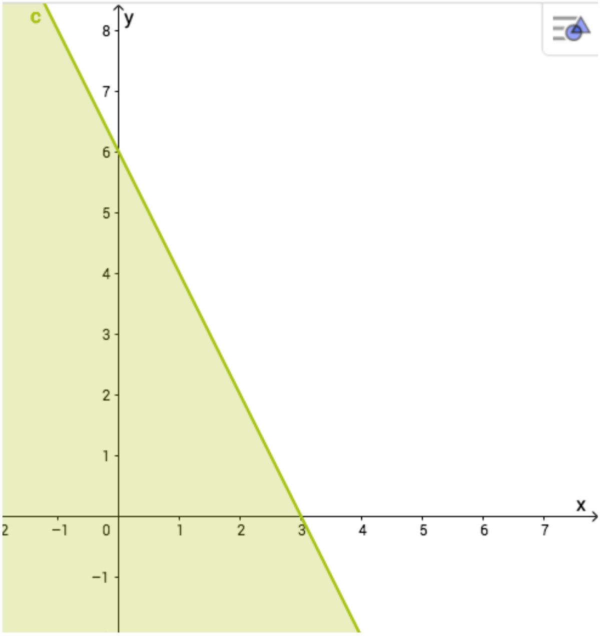
Figura 23. Dominio de una inecuación en la recta real. Fuente: elaboración propia.

Ejemplos: graficar los siguientes sistemas de inecuaciones.

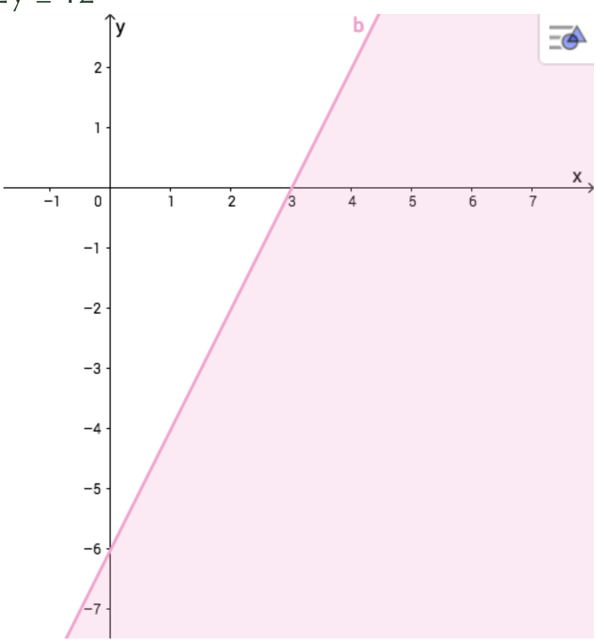
a. $4x + 2y \geq 12$



b. $4x - 2y \geq 12$



c. $4x + 2y \leq 12$



4. Apartado final

El manejo de la inecuación es crítico para la interpretación de la región donde se encuentra la solución al sistema de ecuaciones, no es conveniente hacer nemotecnia, ni fijar como cierto que toda inecuación con sentido mayor o igual la región se encuentra por encima y/o a la derecha de la línea, ni que una condición de menor igual siempre se representa por debajo y/o a la izquierda de la línea, lo sugerido es representar la línea y luego validar puntos a cada región de la misma para determinar en cuál de las regiones se satisface la condición.

Ejercicios propuestos

Para cada uno de los siguientes puntos grafique la región donde la inecuación encuentra solución.

1. $3x + 2y \geq 18$
2. $x - 4y \leq 6$
3. $x + y > 4$

Unidad 6
Programación lineal

Resumen

El camino recorrido en el estudio y aprendizaje de las ecuaciones lineales, de sus métodos para desarrollar y encontrar las respuestas a los sistemas, de reconocer la diferencia entre ecuación e inecuación llega a un punto donde pone de manifiesto todo su poder para la interpretación y búsqueda no de cualquier respuesta o punto solución, sino del punto óptimo. La optimización le confiere a la programación lineal (PL) el sentido y valor donde el modelo evoluciona y toma sentido en el desarrollo y bienestar de los procesos y la organización.

Cuando se incluye en el modelo de ecuaciones o inecuaciones una ecuación que busca un objetivo y cuya intención es la de valorar los puntos dentro de una región y determinar cuál de ellos la satisface de mejor forma, es cuando se está en presencia de un modelo de PL.

Palabras clave: PL, programación lineal, función objetivo, restricción, optimización.

Prefacio

Las ecuaciones estudiadas a partir de ahora estarán formadas por las condiciones propias del problema de estudio y por la función objetivo que se persiga determinar. Las metodologías estudiadas serán el pilar sobre el que se construya la propuesta de solución, que cuando se agote por capacidad dará lugar al estudio de metodologías que se aceptan como generales y estándar en el desarrollo de los problemas de PL.

1. Modelo matemático

El modelo matemático es la forma como haciendo uso de las expresiones matemáticas estudiadas se expresa o modela una situación real objeto de estudio y que representa el problema a resolver. El modelo matemático busca ser menos complejo que el problema real, se convierte en una representación abstracta de dicha realidad y define por medio de variables los elementos que interactúan, recrean y limitan la realidad estudiada. Las soluciones que se buscan y obtiene con el modelo matemático son de mayor eficiencia y su manejo tan amplio que se convierten en las respuestas sobre las que se hace el proceso de toma de decisión en la organización.

1.1. Elementos del modelo matemático

La estructura de un modelo matemático se elabora a partir del desarrollo disciplinado de los siguientes pasos:

- Entender el problema. Es el paso de inicio y se debe buscar tener claridad sobre la información que se tiene del problema, la condición de fija o conocida de los datos reunidos y la determinación de lo que es variable y se va a convertir en los puntos sobre los que gira la decisión. Entender el problema va más allá de escribir el sistema de ecuaciones, por el contrario, no se debe escribir ningún intento de ecuación hasta no garantizar que hay plena comprensión de la realidad a modelar y de sus iteraciones. Se sugiere el uso de esquemas, matrices, tablas resumen, esquemas sinópticos o mentales que permitan obtener la mayor claridad sobre los datos que se tienen, su comportamiento y las variables a establecer para la búsqueda del objetivo.

- Definir las variables. Los datos tienen diferentes comportamientos, cuando su desempeño es determinado y su valor conocido, el dato es fijo y va a ser utilizado como coeficiente o valor de restricción en la ecuación, por el contrario, cuando el comportamiento no se conoce con exactitud y puede tomar diferentes valores, los cuales generan diferentes soluciones, se está en presencia de un valor variable. El gran valor de las variables es que constituyen el elemento del modelo que busca optimizar el objetivo y sobre ellas se hace la formulación de todo el sistema.

- Escribir la función objetivo. Cuando en PL se habla de optimizar, esta situación tiene valores extremos o de frontera, no acepta condición intermedia; o se busca alcanzar el mayor valor posible cuando se hace referencia a ingresos, utilidades, beneficios, o se busca el menor valor posible cuando la fuente es egreso, costo, tiempo, entre otros. La función objetivo es el plus que transforma un sistema de ecuaciones en un modelo matemático con la capacidad de optimizar un resultado.

- Determinar las restricciones. Una condición frontera, que limita, es el papel de las restricciones, son condiciones que restringen la búsqueda de la solución óptima al problema objeto de estudio. Los principales tipos de restricción son:

- De no negatividad: las variables no aceptan valores negativos, no es viable una respuesta donde la cantidad a producir sea negativa.

- De proceso: cuando la condición se establece por disponibilidad de recursos, ejemplo el número de horas máquina para proceso.
- De producto: la condición se genera por una relación entre variables, por ejemplo, se está determinando la cantidad a fabricar de comedores de 4 para optimizar el resultado, es obvio que debe existir una restricción que indique que, por cada mesa fabricada, se deben fabricar 4 sillas del modelo del comedor.

1.2. Pasos para resolver un problema de PL

El primer paso es la interpretación, análisis y comprensión de la situación real o problema de estudio. Una vez que se ha surtido esta fase el siguiente paso es la elaboración del modelo matemático, el cual se estudió en el punto 6.1.1, la siguiente fase corresponde al desarrollo del modelo y la obtención de respuestas. El siguiente paso consiste en la validación de las respuestas obtenidas, cualquiera que sea el resultado se debe garantizar el cumplimiento del modelo matemático en especial el conjunto de restricciones.

2. Método gráfico

Una forma básica para resolver problemas de PL la constituye el método gráfico, el cual se construye sobre la teoría de resolución de las ecuaciones lineales y de las inecuaciones. A partir del siguiente ejemplo se presenta la metodología para resolver problemas lineales de forma gráfica.

Ejemplo: Se va a organizar una planta de un taller de motocicletas donde van a trabajar soldadores y mecánicos. Por necesidades de mercado, es necesario que haya un mayor o igual número de mecánicos que de soldadores y que el número de mecánicos no supere al doble de soldadores. En total hay disponibles 30 soldadores y 20 mecánicos. El beneficio de la empresa por jornada es de $250 por soldador y $200 por mecánico. ¿Cuántos trabajadores de cada clase deben elegirse para obtener el máximo beneficio y cual es este?

- Paso 1: entender el problema

Soldadores + Mecánicos;
Mecánicos >= Soldadores
Mecánicos <= Doble de soldadores

Soldadores = 30
Mecánicos = 20
Beneficio = $250 / soldador; $200 / mecánico

No importa la forma como se reúnan e identifiquen los datos del problema, lo que es importante y crítico es que antes de empezar a escribir ecuaciones se tenga pleno conocimiento de los datos, su comportamiento, que es conocido y que falta por determinar.

- Paso 2: Definir variables de decisión

Los valores no determinados y que van a permitir lograr el objetivo en torno al máximo beneficio para la empresa son la cantidad de trabajadores de cada oficio a elegir, por lo tanto, la definición de variables será:

x= cantidad de soldadores a elegir

y= cantidad de mecánicos a elegir

Este paso es crítico, al no hacer una adecuada definición de variables los siguientes pasos serán errados y confusos.

- Paso 3: establecer la función objetivo

A partir de las variables definidas se define cual va a ser el objetivo, los problemas de PL solo optimizan en los extremos de maximizar o minimizar. Un problema de PL solo tendrá una función objetivo y está solo tendrá un sentido de optimización. La FO es:

$$250x + 200y = z\text{máx}$$

Se acostumbra a identificar con la variable z a la función objetivo, la cual a gusto de quién está estudiando el problema puede lo mismo que las variables tener cualquier tipo de identificación o nombre.

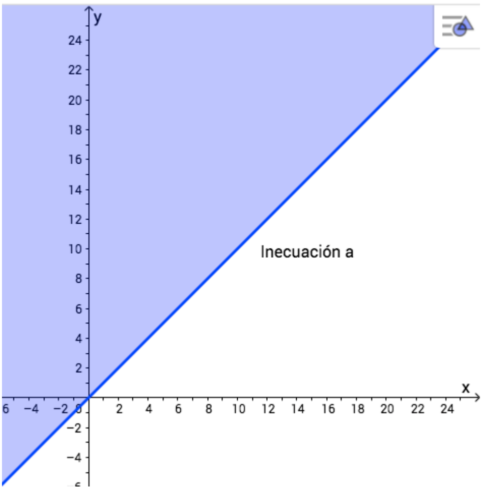
- Paso 4: Definir las restricciones y/o condiciones

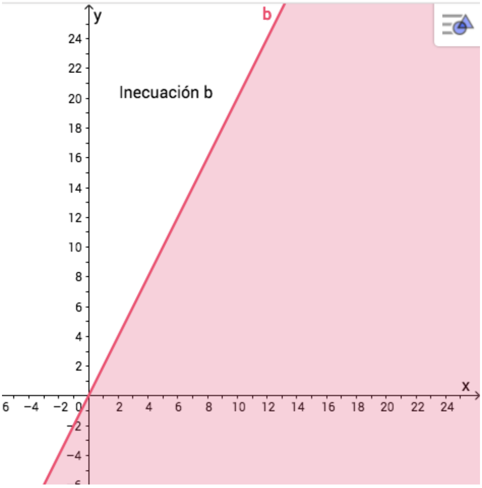
Se identifican y escriben todos los tipos de restricción presentes en el problema.

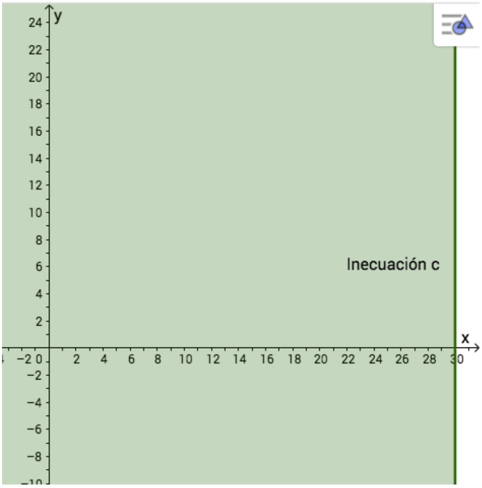
a. $y \geq x$ El número de mecánicos debe ser mayor o igual al número de soldadores.
b. $y \leq 2x$ El número de mecánicos debe ser menor o igual al doble del número de soldadores
c. $x \leq 30$ El número de soldadores es máximo 30
d. $y \leq 20$ El número de mecánicos máximo es 20
e. $x; y \geq 0$ Restricción de no negatividad

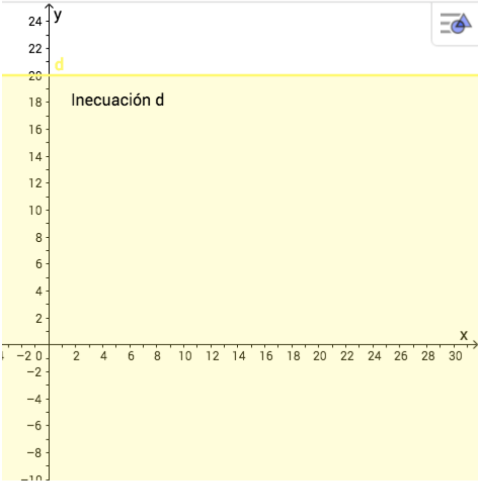
- Paso 5: Solucionar el modelo de PL

Primero se va a resolver por el método gráfico. Para esto se gráfica cada una de las ecuaciones en un plano de referencia.

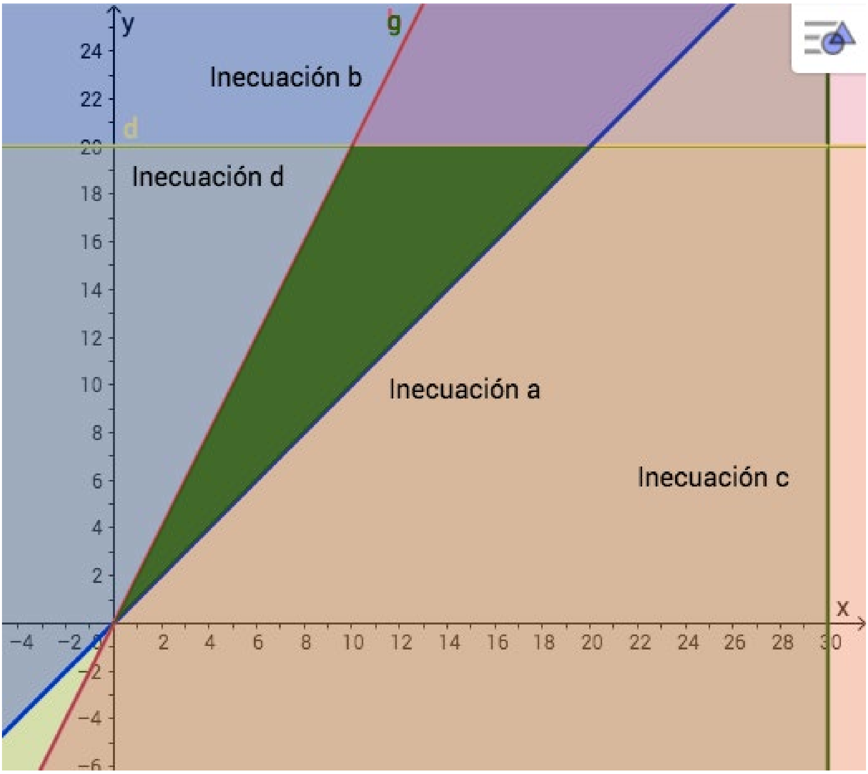






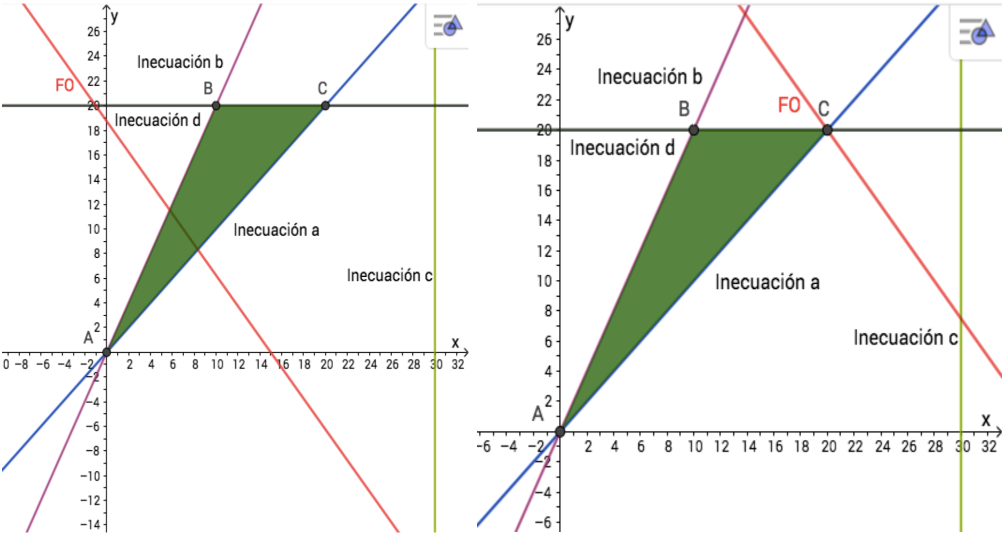


Ahora al obtener una gráfica conjunta con todas las restricciones.



La zona (color verde) donde se cumplen todas las condiciones del modelo de PL es la llamada región factible o región solución, que es donde se encuentran los valores que satisfacen el sistema de inecuaciones propuesto. Cuando el modelo no permite obtener una región factible, se dice que el problema de PL no tiene solución.

Determinada la región factible el siguiente paso es la identificación de los puntos extremos o vértices que es donde se va a optimizar la función objetivo.



Los vértices son:

Vértice	Coordenadas	Valor de la FO
A	(0; 0)	0
B	(10; 20)	6.500
C	(20; 20)	9.000

Como la FO desea optimizar el máximo beneficio, por lo tanto, esto se alcanza en el vértice C, es donde la FO toma el máximo valor posible. El problema encuentra una solución óptima al contratar 20 soldadores y 20 mecánicos.

Ejemplo de minimización. Un paciente requiere una dieta estricta con dos alimentos A y B. Cada unidad de alimento A contiene 120 calorías y 2 gramos de proteínas; la unidad de alimento B contiene 100 calorías y 5 gramos de proteínas. La dieta requiere como mínimo 1000 calorías y 30 gramos de proteínas. Si el precio de cada unidad del alimento A es de 600 pesos y cada unidad del alimento B es de 800 pesos, ¿Cuántas unidades de cada alimento debe contener la dieta para que el costo sea mínimo?

- Paso 1: entender el problema

Se organiza la información de tal forma que permita sintetizar los datos del problema: Una sugerencia es la de elaborar tablas referenciales o matrices correlaciónales.

Tipo de alimento	Calorías / und	Proteína (gr/und)	Costo ($/und)
A	120	2	600
B	100	5	800
Req. mínimos	1.000	30	

- Paso 2: definir variables de decisión

Las variables son las unidades por cada tipo de alimento a mezclar en la dieta para que se cumpla con toda la condición nutricional al menor costo posible.

x=Unidades de alimento A a mezclar en la dieta

y=Unidades de alimento B a mezclar en la dieta

- Paso 3: establecer la función objetivo

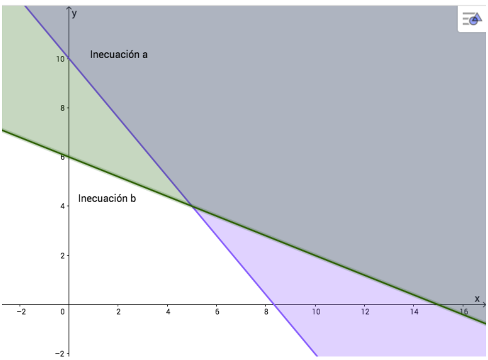
Se busca obtener la mezcla al menor costo posible.

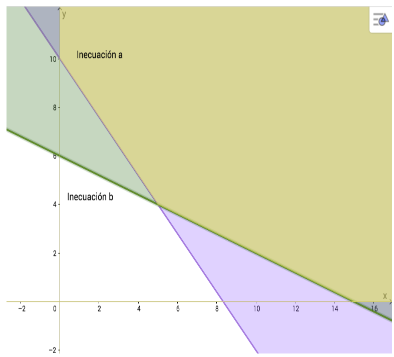
$$600x+800y = z\text{mín}$$

- Paso 4: definir las restricciones y/o condiciones

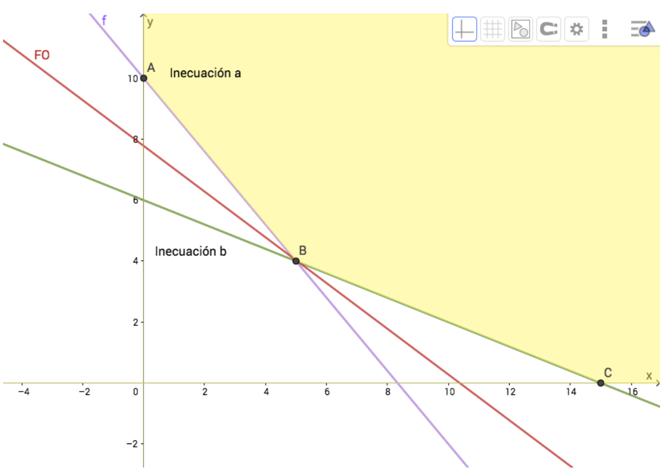
Las condiciones y/o restricciones que se identifican en el problema son:

a. $120x+100y \geq 1.000$: cantidad de calorías que debe contener la mezcla
b. $2x+5y \geq 30$: cantidad de proteína que debe contener la mezcla
c. $x; y \geq 0$: restricción de no negatividad





Se observa la región factible sin acotamiento superior, lo que significa que si el problema buscara optimizar en términos de beneficio o utilidad el modelo no tendría solución ya que no tiene límite superior. Para determinar el valor optimo se procede a la identificación de los vértices en la región factible.



Los vértices son:

Vértice	Coordenadas	Valor de la FO
A	(0; 10)	8.000
B	(5; 4)	6.200
C	(15; 0)	9.000

La FO busca el mínimo costo posible para la elaboración de la dieta, este se consigue en el vértice B, donde se indica que se deben mezclar 5 unidades del alimento A y 4 unidades del alimento B, generando un costo en la mezcla de $6.200.

3. Apartado final

El empleo del método gráfico es de gran utilidad para un desarrollo simple y claro del modelo matemático, la representación gráfica de las restricciones permite una aplicación de los conceptos de inecuación donde se hace viable establecer una zona donde confluyan todas las condiciones del modelo y permite la definición de una zona de solución viable y óptima.

Ejercicios propuestos

1. El señor y la señora Pérez hacen un contrato de fabricación de al menos 80 marcos para pinturas, 40 estatuas y 60 libreros para una tienda. En una semana la señora Pérez puede hacer 4 marcos, 2 estatuas y 2 libreros en promedio. El señor Pérez puede hacer 2 marcos, 1 estatua y 3 libreros. Cada uno de ellos obtendrá $40 por el trabajo de una semana. Encontrar el número de semanas de trabajo que el contratista debe darles para minimizar sus costos.

2. Una compañía tiene oferta limitada de ingredientes herbales que usa en la producción de sazonadores. Hay 4.000 onzas de ingrediente HB01 y 7.000 de HB02, los ingredientes se utilizan para producir ya sea salsa tártara o pimentón. Cada botella de salsa tártara requiere una onza de HB01 y 2 onzas de HB02. Cada botella de pimentón requiere 2 onzas de HB01 y 3 onzas de HB02. El departamento de mercadeo reporta que si bien puede venderse todos los frascos de pimentón que se produzcan; solo se venderá un máximo de 6.000 botellas de salsa tártara. La compañía obtiene un beneficio de $5 por cada botella de salsa tártara y $2 por cada botella de pimentón. ¿Qué combinaciones de estos productos maximizará las utilidades para la empresa?

3. La compañía cervecera La Fiesta desea determinar la producción de sus cervezas Brava y Dulce para que genere la mayor utilidad en sus fábricas de Bogotá. Las utilidades por caja de 25 unidades son respectivamente de $3.500 y $3.000 para Brava y Dulce. Las disponibilidades semanales con que cuenta la compañía para los tres recursos limitantes (Se cuenta con cantidades suficientes de los demás recursos) son: cebada 3000 Kg, glucotel 1.500 Kg y presupuesto $400.000. Los requerimientos de estos recursos por caja de cerveza son dados por la matriz siguiente:

	Cebada (Kg)	Glucotel (Lb)	Presupuesto ($)
BRAVA	50	0	5.000
DULCE	30	100	8.000

¿Qué solución sugiere respecto a que cantidad de unidades fabricar para maximizar los ingresos de La Fiesta?

Referencias

Anderson, D. R., Sweeney, D. J., Williams, T. A., Camm, J. D., Martin, K. (2011). *Métodos cuantitativos para los negocios*. (11a ed.). México, D.F., México: Cengage Learning Editores

Ángel, A. R. (2008). *Álgebra intermedia*. México, D.F., México: Pearson educación

Eppen, G.D. (2000). *Investigación de operaciones en la ciencia administrativa*. (5a ed.). México, D.F., México: Prentice Hall

Fullciencia.com. (2017) *Infografia 2 sobre el método científico*. Recuperado de https://goo.gl/KgpMbm.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6a ed.). México, D.F., México: McGraw Hill Interamericana.

Hillier, F., Lieberman, G. (2010). *Introducción a la investigación de operaciones*. México, D.F., México: McGraw-Hill Interamericana editores, S.A. de C.V.

Izar, J.M. (2012). *Investigación de operaciones*. México: México. Editorial Trillas.

Lagos, N. J. (2006). *Matemáticas II álgebra*. México, D.F., México: Pearson educación

Lehmann, CH. H. (1989). *Geometría analítica*. México, D.F., México: Editorial Limusa S. A.

Merino, L. Santos, E. (2006). *Algebra lineal con métodos elementales*. Madrid: Paraninfo.

RAE. Real Academia Española. (2017). http://dle.rae.es/?id=VH7cofQ

Taha, H. (2012). *Investigación de operaciones*. (9a ed.). México, D.F., México: Pearson Educación

Thomas, Jr. G. B. (2006). *Cálculo, una variable*. (11a ed.). México, D.F., México: Pearson educación

NOTAS
DE CLASE